Die Planetare Grenzschicht des Mars und ihr Einfluß auf das Ausfallen von atmosphärischem Staub

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultäten
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von

Wolfgang Dobler

aus Biberach/Riß

Göttingen 1998

D7

Referent: Prof. Dr. Franz Kneer
Korreferent: Dr. Horst-Uwe Keller

Tag der mündlichen Prüfung: 2. 7. 1998

Inhaltsverzeichnis

1 Mars **3**
- 1.1 Allgemeines . . . 3
- 1.2 Die Marsatmosphäre . . . 5
  - 1.2.1 Die Planetare Grenzschicht . . . 7
- 1.3 Bahnbewegung . . . 8
- 1.4 Atmosphärischer Staub . . . 10
  - 1.4.1 Eigenschaften des Staubes . . . 11
  - 1.4.2 Ausfallen des Staubes . . . 13

2 Thermodynamisches **17**
- 2.1 Die Potentialtemperatur . . . 17
- 2.2 Temperaturabhängigkeit der Wärmekapazität . . . 21

3 Strahlung **25**
- 3.1 Die Planckfunktion . . . 25
- 3.2 Strahlungstransport im IR . . . 26
- 3.3 Strahlungstransport im Optischen . . . 35
  - 3.3.1 Das Strahlungstransportproblem . . . 36
  - 3.3.2 Die Eddington-Näherung . . . 38
  - 3.3.3 Die δ-Eddington-Näherung . . . 42

4 Turbulenz **45**
- 4.1 Die Navier-Stokes-Gleichung . . . 46
  - 4.1.1 Die Reynolds-Zahl . . . 46
  - 4.1.2 K-Modelle und Mischungslänge . . . 49

4.2 Die Planetare Grenzschicht 51
4.3 Ähnlichkeitstheorie nach Monin und Obuchov 54
4.4 K-ε-Modelle 57
4.4.1 Zerfall der Turbulenz 59
4.4.2 Die vertikale Geschwindigkeit 63

5 Das numerische Schema 65
5.1 Die Diffusionsgleichung als Beispiel 65
5.2 Diskretisierung in der Atmosphäre 70
5.3 Diskretisierung im Boden 72
5.4 Atmosphärische Randbedingungen 76
5.4.1 Die untere Randbedingung 76
5.4.2 Die obere Randbedingung 82
5.5 Das Iterationsverfahren 82
5.5.1 Chaos 87

6 Der Transport des Staubes 93
6.1 Dynamik 93
6.1.1 Bewegung in ruhiger Atmosphäre 93
6.1.2 Bewegung in turbulenter Atmosphäre 97
6.2 Transport in der Oberflächenschicht 100
6.3 Die numerische Behandlung des Staubtransports 101

7 Ergebnisse: Die Planetare Grenzschicht 105
7.1 Modellbeschreibung 105
7.2 Ergebnisse 106
7.2.1 Gitter und Temperatur im Boden 106
7.2.2 Die Parameter der Oberflächenschicht 110
7.2.3 Die meteorologischen Felder 114
7.2.4 Die turbulenten Größen 117

8 Ergebnisse: Verhalten des Staubes 121
8.1 Das Modell 121
8.2 Die Dynamik der einzelnen Staubpopulationen 122
8.2.1 Modelle ohne zusätzliche Diffusivität 123
8.2.2 Modelle mit zusätzlicher Diffusivität 130
8.3 Variationen der Größenverteilung 134

8.3.1 Modelle ohne zusätzliche Diffusivität 136
8.3.2 Modelle mit zusätzlicher Diffusivität 140
8.4 Diskussion der Ergebnisse 141

9 Zusammenfassung **149**

Literaturverzeichnis **151**

Verwendete Symbole **161**

Einleitung

Mars war schon vor Jahrtausenden ein Gegenstand der Faszination für das damals noch eng verwachsene siamesische Zwillingspaar der Astronomie und Astrologie. Unsere heutige Vorstellung vom «Roten Planeten» ist die eines in mancher Hinsicht recht erdähnlichen Planeten, dessen Oberfläche und dünne Atmosphäre von ubiquitärem Staub geprägt sind.

Nicht nur während der zum Teil planetenumspannenden Staubstürme, sondern auch in ruhigen Jahreszeiten ist die Atmosphäre nie wirklich klar, sondern enthält stets eine gewisse Menge an Staub. Dieser Staub hat einerseits die Tendenz, zur Oberfläche zu sinken, wird andererseits aber von vertikalen und vor allem turbulenten Bewegungen in der Atmosphäre teils daran gehindert, teils umso rascher nach unten verfrachtet. Atmosphärische Turbulenz tritt vor allem in der *Planetaren Grenzschicht* der Marsatmosphäre auf, die typischerweise etwa die untersten 5 km der Atmosphäre umfaßt, in denen tagsüber Konvektion herrscht. Dir vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der numerischen Modellierung dieser Planetaren Grenzschicht und der Auswirkung der dort herrschenden Turbulenz auf das Sedimentationsverhalten des Staubes.

In Kapitel 1 werden einige wichtige Aspekte des sehr breitgefächerten Themas «Mars» angesprochen. Die Kapitel 2 und 3 liefern notwendiges Rüstzeug aus der Thermodynamik und der Theorie des Strahlungstransports. Kapitel 4 gibt einen Überblick über die hier benutzten Turbulenzmodelle (K-ε-Modell und Ähnlichkeitstheorie) und diskutiert die Charakteristika der Planetaren Grenzschicht. Das in den Modellrechnungen gebrauchte numerische Schema ist Gegenstand von Kapitel 5. In Kapitel 6 werden bis dahin ausgeklammerte Aspekte der Dynamik von Staubteilchen erläutert. Die Kapitel 7 und 8 enthalten die Ergebnisse der Modellrechnungen, sowie deren Interpretation. Abschließend werden die wichtigsten Ergebnisse in Kapitel 9 zusammengefaßt.

Kapitel 1

Mars

1.1 Allgemeines

Mars, der äußere Nachbarplante der Erde, ist dieser in mancher Hinsicht ähnlicher als sämtliche anderen Planeten unseres Sonnensystems. Zwar kommt die Venus unserem Heimatplaneten in Masse und Radius (wesentlich) näher, doch sind damit die Parallelen bereits weitgehend erschöpft, während Mars einen ähnlich langen Tag wie die Erde, Jahreszeiten, Polkappen und eine Oberfläche hat, die zumindest an den drei Stellen, wo sie von nahem aufgenommen wurde, manchen ariden Landschaften auf der Erde sehr ähnlich sieht.

In Tabelle 1.1 sind einige Parameter von Mars und Erde im Vergleich dargestellt. Mars ist ungefähr halb so groß wie die Erde; seine Oberflächenschwerkraft beträgt ca. ein Drittel des irdischen Wertes. Während das Marsjahr knapp zwei irdische Jahre dauert, ist der Tag dort fast genau so kurz wie hier, die Abweichung beträgt lediglich 3 % (40 min). Da die Achsneigung des Mars, also die Neigung der Spin- zur Bahndrehimpulsachse, etwa 25° beträgt (für die Erde knapp 24°), treten dort Jahreszeiten auf, die den hiesigen in Ausprägung und relativer Dauer vergleichbar sind.

Diese Ähnlichkeit zwischen den beiden Nachbarplaneten fordert bei kühnen Geistern schon lange Phantasie und Spekulationsdrang heraus, welche die verschiedensten Früchte getragen haben, von guter Literatur über weniger gute Bücher und schlechte Hollywood-Filme bis

Größe	*Mars*	*Erde*	*Einheit*
Allgemeine Parameter			
Masse	0.6419	5.9736	[10^{24} kg]
Mittlerer Radius	3390	6371	[km]
Mittlere Dichte	3933	5520	[kg/m^3]
Fallbeschleunigung	3.69	9.78	[m/s^2]
Fluchtgeschwindigkeit	5.03	11.19	[km/s]
Bond-Albedo	0.16	0.385	
Solarkonstante	595	1380	[W/m^2]
Mittlere Oberflächentemperatur	216.6	247.3	[K]
Höhenunterschiede	36	20	[km]
Bahnparameter			
Große Halbachse	227.9	149.6	[10^6 km]
Siderische Umlaufzeit	686.980	365.256	[d]
Synodische Umlaufzeit	779.94	—	[d]
Perihelabstand	206.6	147.1	[10^6 km]
Aphelabstand	249.2	152.1	[10^6 km]
Exzentrizität	0.0934	0.0167	
Siderische Rotationszeit	24.6230	23.9345	[h]
Achsneigung	25.°19	23.°45	

Tabelle 1.1: Einige Parameter für Mars und Erde im Vergleich. [Quellen: Kieffer et al. (1992); *Mars Fact Sheet* (n.d.)]

hin zu periodisch wiederkehrenden Berichten von angeblichen Bakterienfunden in vom Mars stammenden Meteoriten.

Die wissenschaftlichen Erkenntnisse über den Mars bis kurz vor der *Pathfinder*-Mission sind in der 1 500-seitigen Monographie von Kieffer et al. (1992) dargestellt oder zitiert. Sie gründen sich neben der jahrhundertelangen erdgebundenen astronomischen Beobachtung auf die Meßdaten von amerikanischen und sowjetischen Sonden. Nachdem *Mariner 9* im Jahr 1972 eine Vielzahl von Daten und Bildern aus einer Umlaufbahn um den Planeten übermittelte, die das Verständnis vom Mars in vieler Hinsicht revolutionierten, sendeten die *Viking*-Landemodule 1976–1982 Bilder von der Marsoberfläche und insbesondere meteorologische Daten, die (bei einigen Lücken) einen Zeitraum von mehr als drei Marsjahren umfassen. In Tabelle 1.2 sind die areogra-

phischen[1] Koordinaten der Landeplätze der drei irdischen Marssonden aufgelistet. Die Höhe ist relativ zu einem Referenzellipsoid («Aroid») gerechnet.

Sonde	*Breite*	*Länge*	*Höhe*
Viking 1	22.°27 N	49.°97 W	-2 km
Viking 2	47.°57 N	225.°74 W	-3 km
Mars Pathfinder	19.°33 N	33.°55 W	

Tabelle 1.2: Koordinaten der drei auf dem Mars gelandeten Raumsonden

1.2 Die Marsatmosphäre

Die Atmosphäre des Mars besteht zu etwa 95 % aus Kohlendioxid (CO_2). Die wichtigsten weiteren Konstituenten sind in Tabelle 1.3 aufgeführt; sie können in mancher Hinsicht als Spurengase bezeichnet werden, zumal Argon als monoatomares Gas, sowie Stickstoff und Sauerstoff, die sich aus symmetrischen Molekülen zusammensetzen, im Infraroten nur wenige Absorptionslinien besitzen, was CO_2 zum einzigen nennenswerten Absorber von Wärmestrahlung in der klaren Marsatmosphäre macht.

Aufgrund der niedrigen Fluchtgeschwindigkeit (und anderer wesentlich komplizierterer Faktoren, siehe z. B. Chamberlain und Hunten, 1987) beträgt der Oberflächendruck nur einige Millibar. Weitere Eckdaten der Marsatmosphäre sind in Tabelle 1.4 aufgeführt. Die Skalenhöhe $H = RT/(\mu g)$ ist trotz der geringen Schwerkraft der irdischen (ca. 8 km) vergleichbar, da die mittlere Temperatur T auf dem Mars niedriger und die Molmasse μ der Atmosphäre höher ist als auf der Erde. Die Tagesschwankungen der Temperatur liegen weit über dem irdischen Wert selbst in kontinentalen Gebieten. Das liegt, abgesehen vom

[1] Viele von den Geowissenschaften geprägte Begriffe enthalten das griechische Wort γῆ – Erde. In der Wissenschaft vom Mars wird die Vorsilbe geo- gerne durch areo- ersetzt, was vom griechischen Namen des Mars – Ἄρης – abgeleitet ist. Allerdings wird diese Regel nicht immer angewandt und die geostrophische Geschwindigkeit (Abschnitt 4.2) beispielsweise behält ihren geozentrischen Namen auch auf anderen Planeten.

Molekül	*Volumenanteil* [%]
CO_2	95.32
N_2	2.7
Ar	1.6
O_2	0.13
CO	0.07
H_2O	0.03

Tabelle 1.3: Mittlere Zusammensetzung der Marsatmosphäre in Volumenprozent. Die gesamte CO_2-Menge in der Atmosphäre schwankt im Lauf des Jahres um ca. 20 %. [Nach Kieffer et al. (1992)]

fehlenden Wasser (das durch Verdunsten und Kondensieren eine Thermostatwirkung hat, sowie durch Wolkenbildung die Strahlungsbilanz massiv verändert), auch daran, daß der Treibhauseffekt in der Marsatmosphäre wesentlich kleiner ist als im Fall der Erde — und dies obwohl die Säulendichte von CO_2 etwa 28 mal höher ist. Der Grund liegt zum einen wiederum im geringen atmosphärischen Gehalt am Haupttreibhausgas H_2O, zum anderen in der schwächeren Druckverbreiterung der Absorptionslinien aufgrund des geringen Oberflächendrucks von etwa 6 mbar. Sie führt dazu, daß die opaken Bereiche des 15μm-Bandes von CO_2 letzten Endes trotz hoher Sättigung in den Linienkernen nur einen kleinen Anteil des Bandes überdecken (vgl. Abbildung 3.2 in Kapitel 3).

Wie die Erde besitzt auch der Mars Polkappen, allerdings mit einem wichtigen Unterschied: während sie auf unserem Planeten aus Wassereis, also einem Nebenbestandteil der Atmosphäre bestehen, werden die Kappen auf dem Mars vor allem aus CO_2-Eis («Trockeneis») gebildet, also dem atmosphärischen Hauptbestandteil. Da während des Sommers einer Hemisphäre die jeweilige Polkappe teilweise oder ganz sublimiert, um sich im Winter neu zu bilden, ergibt sich ein Jahreszyklus mit beträchtlichen Druckschwankungen (circa 30 %), die dadurch verursacht werden, daß bis zu einem Drittel der Atmosphäre zeitweise in den Polkappen gebunden wird und im Laufe eines Jahres zwischen den beiden Hemisphären hin und her wandert.

Größe	*Wert*	
Oberflächendruck	$560\,\mathrm{Pa}$	
Atmosphärische Säulendichte	$150\,\mathrm{kg/m^2}$	
Masse der Atmosphäre	$21.7 \cdot 10^{15}\,\mathrm{kg}$	
Gebundene CO_2-Menge:		
Nordpolarkappe	$3.5 \cdot 10^{15}\,\mathrm{kg}$	
Südpolarkappe	$8.1 \cdot 10^{15}\,\mathrm{kg}$	
Skalenhöhe	$11.1\,\mathrm{km}$	
Adiabatischer Temperaturgradient	$4.5\,\mathrm{K/km}$	
Atmosphärische optische Dicke	$0.1 \ldots 10$	
Mittlere Molmasse	$43.43 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}$	
Mittlere Temperatur	$\approx 210\,\mathrm{K}$	
Täglicher Temperaturbereich (*Viking*1)	$184 \ldots 242\,\mathrm{K}$	
Windgeschwindigkeiten an den *Viking*-Landeplätzen	$2 \ldots 7\,\mathrm{m/s}$	(Sommer)
	$5 \ldots 10\,\mathrm{m/s}$	(Herbst)
	$17 \ldots 30\,\mathrm{m/s}$	(in Staubstürmen)

Tabelle 1.4: Einige Parameter der Marsatmosphäre im Jahresmittel. [Quellen: Kieffer et al. (1992); *Mars Fact Sheet* (n.d.)]

1.2.1 Die Planetare Grenzschicht

Der Mars besitzt wie die Erde eine sogenannte Planetare Grenzschicht, in der tagsüber turbulente Konvektion herrscht (vgl. Abbildung 4.1). Wegen der stärkeren Temperaturschwankungen und der dünneren Atmosphäre wird diese turbulent durchmischte Schicht in der Marsatmosphäre höher als in der irdischen und erreicht typische Höhen von vier, unter extremen Bedingungen sogar bis zu zehn Kilometer.

Die Planetare Grenzschicht wurde von Savijärvi (1991; 1995) und von Haberle et al. (1993) und Zent et al. (1993) mit in Anlehnung an die Erdatmosphäre entwickelten Modellen erfolgreich modelliert. Diese Modelle, an die sich auch das in dieser Arbeit verwendete K-ε-Modell anlehnt, sind eindimensional, das heißt sie berücksichtigen ausschließlich Abhängigkeiten der meteorologischen und turbulenten Größen von der Zeit t und von der Höhe z über großen, einigermaßen homogenen Ebenen und die Modelle sollten selbst dort, wo diese Bedingung

nicht allzu schwerwiegend verletzt ist, eine gewisse qualitative Aussagekraft behalten. Eine weitere Bedingung ist die Abwesenheit von Zyklonen und anderen drastischen Wetterphänomenen, da diese starke horizontale Inhomogenitäten hervorrufen. Wie *Viking*-Beobachtungen (Barnes, 1980) und Modellrechnungen (Barnes, 1984; Pollack et al., 1990) zeigen, ist dies auf Mars in mittleren Breiten im Frühjahr und Sommer der Fall.

Ein wichtiger Unterschied der vorliegenden Arbeit zu den genannten Modellen ist die andere Wahl des Turbulenzmodells. Das hier benutzte K-ε-Modell besitzt weniger angepaßte Parameter als das in den erwähnten Arbeiten verwendete Mellor-Yamada-Modell (Mellor und Yamada, 1982), was für die Anwendung auf unbekanntem Terrain eine wünschenswerte Eigenschaft ist.

1.3 Bahnbewegung

De Exzentrizität ε der Marsbahn ist mit 0.0934 relativ groß, was dazu führt, daß Perihelabstand $r_{\mathrm{Per}} = a(1-\varepsilon)$ und Aphelabstand $r_{\mathrm{Ap}} = a(1+\varepsilon)$ von der Sonne sich merklich voneinander und von der großen Halbachse a der Bahn unterscheiden. Noch deutlicher ist der Unterschied in der Sonneneinstrahlung, denn die Solar-«Konstante» im Perihel, $S_{\mathrm{Per}} = S_{\male}/(1-\varepsilon)^2$, ist um etwa 45 % höher als diejenige im Aphel, $S_{\mathrm{Ap}} = S_{\male}/(1+\varepsilon)^2$; im Fall der Erde beträgt diese Differenz etwa 7 %.

Da die Rotationsachse des Mars um $\alpha = 25\overset{\circ}{.}19$ gegen die Normale der Marsbahn geneigt ist, besitzt Mars ausgeprägte Jahreszeiten. Dabei schwankt α über lange Zeiträume zwischen 13° und 42°, was zu beträchtlichen Klimavariationen geführt haben dürfte (Ward, 1974; Ward, 1979).

Die marsianischen Jahreszeiten sind auf den beiden Hemisphären recht unterschiedlich ausgeprägt, was weniger mit einer gewissen Nord-Süd-Asymmetrie zusammenhängt, als vielmehr mit den eingangs erwähnten Variationen in der Sonneneinstrahlung aufgrund der Exzentrizität der Marsbahn. Da die nördliche Wintersonnwende in der Zeit der Sonnennähe erfolgt — etwa dreißig Tage nach dem Periheldurchgang — sind die Südsommer heißer, aber auch kürzer als die

Nordsommer, während die Winter auf der Nordhalbkugel milder und kürzer sind als die der Südhemisphäre.

Die Jahreszeiten auf Mars werden traditionell durch die *areozentrische Länge* der Sonne L_s, also die bezüglich des marsianischen Himmelsäquators und Frühlingspunkts bestimmte Rektaszension der Sonne ausgedrückt. $L_\mathrm{s} = 0^\circ$ entspricht somit dem Zeitpunkt der (nördlichen) Frühjahrs-Tagundnachtgleiche, $L_\mathrm{s} = 90^\circ$ der Sommersonnwende, und so weiter, siehe auch Tabelle 1.5.

t [sol]	L_s	*Konstellation*
0	0°	Frühlingsäquinoktium
150	70°	*Aphel*
195	90°	Sommersonnwende
370	180°	Herbstäquinoktium
485	250°	*Perihel*
515	270°	Wintersonnwende

Tabelle 1.5: Ungefährer Jahresablauf auf Mars; t ist die Zeit nach der Frühjahrs-Tagundnachtgleiche, L_s die areozentrische Länge der Sonne. Ein *Sol* ist ein mittlerer Marstag von 24 (irdischen) Stunden und 39 Minuten. Das Marsjahr ist 669.6 sol lang

Eine Tabelle und eine Graphik zur Umrechnung zwischen L_s und der Mittleren Anomalie $M = \Omega \cdot (t - t_\mathrm{P})$ des Mars auf seiner Bahn findet man bei Kieffer et al. (1992); dabei ist Ω die siderische Winkelfrequenz des Sonnenumlaufs und t_P der Zeitpunkt eines Periheldurchgangs. Kennt man M, so kann man den Abstand $r_\mathrm{♂}$ des Mars von der Sonne mit der Formel

$$r = a\Big[1 - \varepsilon\cos M - \frac{\varepsilon^2}{2}(\cos 2M - 1) - \frac{\varepsilon^3}{2!\cdot 2^2}(3\cos 3M - 3\cos M) - \ldots\Big] \tag{1.1}$$

berechnen, siehe Moulton (1970). Entsprechend ergibt sich für die wahre Anomalie v (den heliozentrischen Bahnwinkel vom Perihel)

$$v = M + 2\varepsilon\sin M + \frac{5}{4}\varepsilon^2\sin 2M + \frac{\varepsilon^3}{12}(13\sin 3M - 3\sin M) + \ldots\ . \tag{1.2}$$

Für die in dieser Arbeit vorgestellten Rechnungen zur Planetaren Grenzschicht des Mars ist Gleichung (1.1) wichtig, da sie es erlaubt,

die Sonneneinstrahlung $S_{\sigma} \cdot a^2/r^2$ als Funktion der Jahreszeit L_s zu berechnen.

1.4 Atmosphärischer Staub

Das äußere Erscheinungsbild der Marsoberfläche, wie es die drei dort gelandeten Kameras (von *Viking 1, 2* und *Pathfinder*) zeigen, ist das einer dem Auge wenig Abwechslung bietenden Stein- und Staubwüste. Der Staub ist global und permanent präsent[2] und steht in interessanter Wechselwirkung mit der Atmosphäre, die er einerseits als Aerosol durch Absorption von Sonnenstrahlung in höheren Schichten heizt und in tieferen abkühlt (wie dies auch in irdischen Staubstürmen gemessen wurde, siehe Golitsyn, 1992), und die ihn andererseits verweht, verwirbelt, an einer Stelle aufnimmt und an anderer wieder ablagert. Am beeindruckendsten manifestiert sich dieses Wechselspiel im Phänomen der planetenumspannenden Staubstürme, die in vielen Südsommern auftreten.

Für die Entstehung der (in der Mehrzahl der Fälle nur lokalen) Staubstürme gibt es einige Theorien (siehe etwa Gierasch, 1974; Zurek, 1982). Gesichert ist, daß Staub nur bei recht hohen Reibungsgeschwindigkeiten u_* (siehe Abschnitt 4.2) und damit hohen Windgeschwindigkeiten vom atmosphärischen Gas aufgewirbelt werden kann (Iversen et al., 1976). Ab $u_* = 1.5\,\mathrm{m/s}$ — das entspricht einer Windgeschwindigkeit von 20–30 $\mathrm{m/s}$ in $1.6\,\mathrm{m}$ Höhe über dem Boden, was von den *Viking*-Landefähren als Spitzengeschwindigkeit von Böen auch in etwa gemessen wurde — setzen sich Teilchen der optimalen Größe von etwa $100\,\mu\mathrm{m}$ in Bewegung. Zwar fliegen sie aufgrund ihrer Größe nur ein paar Meter weit, doch gewinnen sie dabei genügend kinetische Energie, um beim Aufprall auf die Oberfläche kleinere Teilchen zu mobilisieren. Auf diese Weise werden letztlich die Teilchen im Bereich von 1–10 $\mu\mathrm{m}$, die während großer Staubstürme in den ganzen untersten $30\,\mathrm{km}$ der Atmosphäre beobachtet werden, in diese eingespeist, obwohl

[2] Colburn et al. (1989) zufolge betrug die optische Tiefe der Atmosphäre über den *Viking*-Landeplätzen immer einige Zehntel. (Thorpe, 1977) schließt aus Orbiterbeobachtungen, daß dies für den Großteil der Oberfläche typisch ist.

ihre Mobilisierungsschwelle bei $u_* > 4\,\mathrm{m/s}$ liegt, einem Wert, der praktisch nie erreicht wird.

1.4.1 Eigenschaften des Staubes

Obwohl über die chemische Zusammensetzung des Staubes auf Mars noch keine volle Klarheit herrscht — als erfolgversprechendster Kandidat wird derzeit Palagonit gehandelt, eine Klasse von amorphen Eisen-Silikaten — gibt es einige Modelle für die Größenverteilung der Staubpartikel und ihre optischen Eigenschaften, die zu vergleichbaren Aussagen kommen. Pollack et al. (1977; 1979) leiten aus *Viking*-Beobachtungen für die Teilchengröße die Parameter für eine modifizierte «Gamma-Verteilung»

$$\frac{dN}{dr} = c \cdot r^2 e^{-4\sqrt{\frac{r}{r_\mathrm{m}}}} \tag{1.3}$$

ab, deren Maximum r_m bei $r_\mathrm{m} \approx 0.4\,\mu\mathrm{m}$ liegt, während der «effektive» Teilchenradius — der querschnittsgewichtete mittlere Radius — $a \approx 2.5\,\mu\mathrm{m}$ beträgt. Dabei bezeichnet $N = N(r)$ die Zahl der Teilchen mit einem Radius kleiner als r.

Interessanterweise scheint sich die Größenverteilung im Laufe der Zeit kaum zu verändern, obwohl die größeren Staubteilchen viel schneller absinken sollten als die kleinen.

Chassefière et al. (1995) leiten aus den *Phobos-2*-Daten darüber hinaus sogar die Höhenverteilung für die Staubparameter ab, verwenden aber einen einfacheren Ansatz für die Größenverteilung,

$$\frac{dN}{dr} = c \cdot r^{\frac{1}{b}-3} e^{-\frac{r}{ab}} \tag{1.4}$$

mit $b = 0.25$. In den Höhenprofilen liegt a um 1–2 $\mu\mathrm{m}$, nimmt dabei aber nach oben hin ab, da größere Teilchen rascher sedimentieren und somit selten in größeren Höhen vorzufinden sind.

Abbildung 1.1 zeigt die Größenverteilung nach Chassefière et al. (1995) und Pollack et al. (1979) im Vergleich. Die Kurven deuten an, daß die von Pollack et al. (1977) vor allem in der Staubsturm-Saison gemessenen Teilchen größer sind, als die von Chassefière et al. (1995) während der ruhigen Jahreszeit, und somit doch eine Verschiebung hin

zu kleineren Teilchen erfolgt. Die mit r^2 gewichtete Verteilung gibt eine bessere Vorstellung von den optischen Eigenschaften des Staubes, vgl. Abschnitt 8.3.

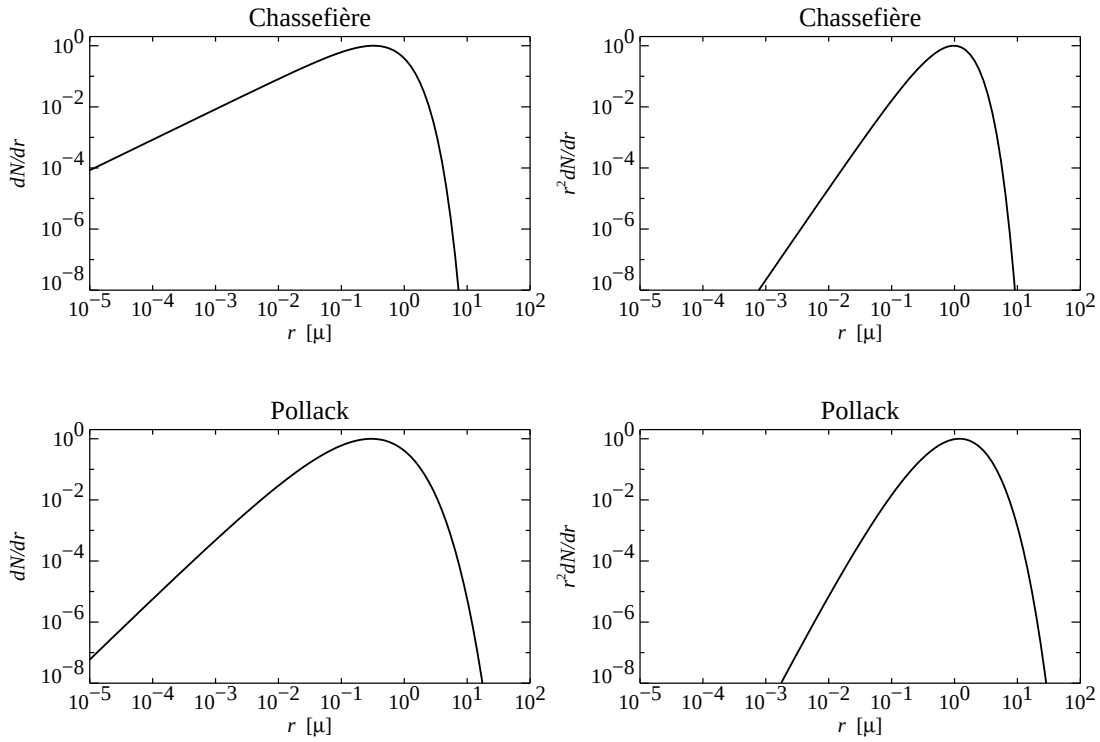

Abbildung 1.1: Größenverteilungen des Aerosols in der Marsatmosphäre nach Chassefière et al. (1995) [oben] und Pollack et al. (1979) [unten]. Links jeweils die differentielle Verteilungsfunktion, rechts die mit r^2 gewichtete differentielle Verteilungsfunktion.

Wiederum aus den *Viking*-Beobachtungen wurden von Ockert-Bell et al. (1997) die optischen Eigenschaften des Mars-Aerosols im Wellenlängenintervall $[210\,\mathrm{nm}, 4\,150\,\mathrm{nm}]$ abgeleitet, wie sie in Abbildung 1.2 gezeigt sind.

$Q_{\mathrm{ext}} := \sigma_{\mathrm{ext}}/\sigma_{\mathrm{geom}}$ bezeichnet die *Extinktionseffizienz*, also das Verhältnis von Extinktionsquerschnitt (optischem Wechselwirkungsquerschnitt) zu geometrischem Querschnitt. Die *Einfachstreualbedo* a und der *Symmetriefaktor* g werden in Abschnitt 3.3 eingeführt. $n = n_r + in_i$ ist der komplexe Brechungsindex des Teilchenmaterials. Diese optischen Eigenschaften liegen der Berechnung der optischen Heizungsraten in der Atmosphäre und an der Oberfläche zugrunde, wie

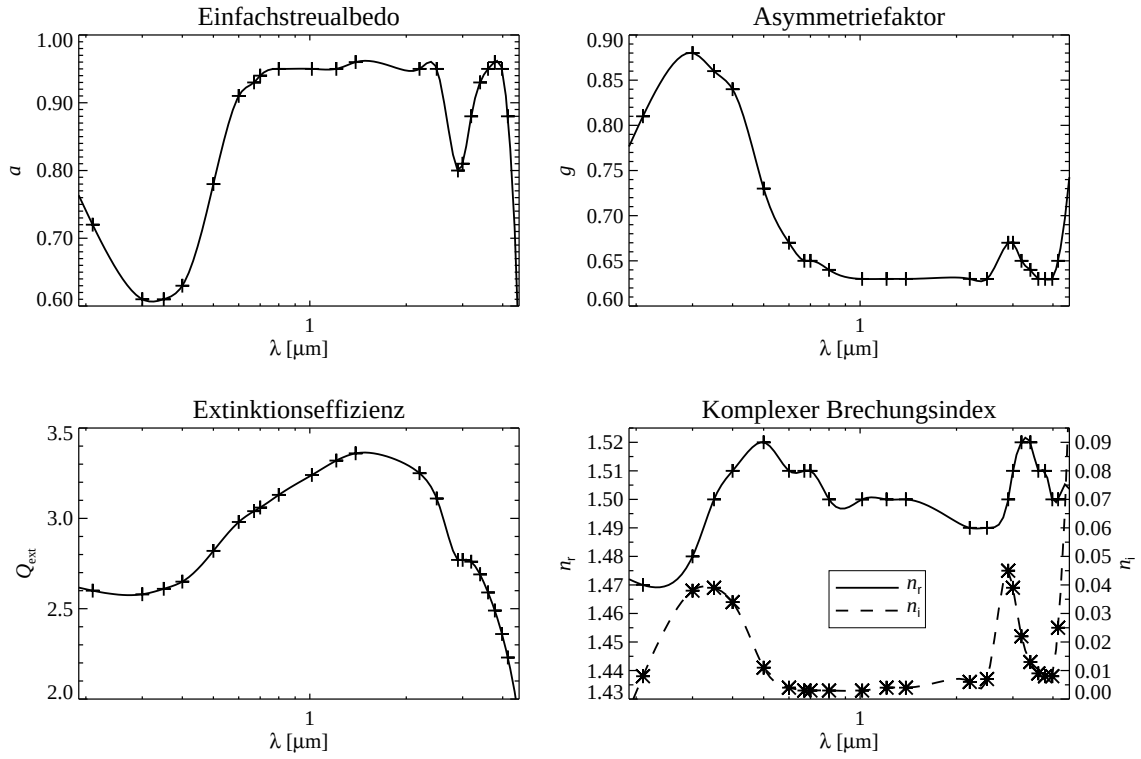

Abbildung 1.2: Optische Eigenschaften des atmosphärischen Marsstaubes nach Ockert-Bell et al. (1997). Einfachstreualbedo a, Asymmetriefaktor g, Extinktionseffizienz Q_{ext} und Brechungsindex $n_r + in_i$ sind als Funktion der Wellenlänge λ aufgetragen. Kreuze (+) und Sterne ($*$) bezeichnen die von Ockert-Bell et al. (1997) angegebenen Datenpunkte, die Kurven sind mit Splines interpoliert

sie in Abschnitt 3.3 diskutiert und im Computerprogramm angewandt wurde.

1.4.2 Das Ausfallen des atmosphärischen Staubes durch die konvektive Atmosphäre

Die vorliegende Arbeit hat die Planetare Grenzschicht des Mars und insbesondere ihren Einfluß auf das Ausfallen des Staubes und die dabei erfolgende Verschiebung in seiner Größenverteilung zum Gegenstand. Nach einem Staubsturm ist die Atmosphäre bis in recht große Höhen mit feinen Staubpartikeln beladen. Dabei ist das Mischungsverhältnis des Staubes (also der Bruchteil der Staubmasse an der Gesamtmasse eines atmosphärischen Volumens) aufgrund der intensiven Durchmi-

schung der Atmosphäre während des Sturms zunächst bis etwa 30–50 km Höhe ziemlich wenig höhenabhängig. Im Laufe einiger Tage bis Wochen kommt es nun zum Ausfallen der gröberen Staubteilchen, wodurch sich die Größenverteilung der Staubkörner ändern sollte.

Die Kenntnis der Sinkgeschwindigkeiten w_{sink} allein reicht dabei nicht aus, um diese Sedimentationsdynamik zu verstehen, da die Atmosphäre nur nachts annähernd so ruhig ist, daß die Teilchen — ungeachtet der vorhandenen atmosphärischen Gewschwindigkeitsfluktuationen — im Mittel mit der Geschwindigkeit w_{sink} nach unten sinken. Tagsüber hingegen mischt die starke Konvektion in der Planetaren Grenzschicht den Staub sehr intensiv durcheinander und transportiert ihn auf kurzen Zeitskalen (in der Größenordnung der Umwälzzeit der Planetaren Grenzschicht, die im Stundenbereich liegt) in Oberflächennähe. Dort fällt ein Teil des Staubes aus, während der Rest wieder nach oben gemischt wird. Der Staub, der die untersten Meter erreicht, wird bei mäßigen Windgeschwindigkeiten wirklich auf die Oberfläche ausfallen, da in Oberflächennähe der turbulente Diffusionskoeffizient K (siehe Abschnitt 4.1.2) proportional zur Höhe z über der Oberfläche und somit klein ist, so daß die turbulenten Effekte unbedeutend werden.

In der vorliegenden Arbeit geht es ausdrücklich nicht um die Entstehung oder das Abklingen von Staubstürmen. Vielmehr wird untersucht, wie das Absinken und Ausfallen von atmosphärischem Staub — woher auch immer er kommen mag — unter ruhigen Bedingungen von der Planetaren Grenzschicht beeinflußt wird.

Die turbulente Mischung in der Planetare Grenzschicht bewirkt dergestalt eine enge Ankopplung der ersten Kilometer der Atmosphäre an die Oberfläche, welche die einzige Senke für den atmosphärischen Staub darstellt. Natürlich stellt die Oberfläche auch eine Quelle von Staub dar, die insbesondere bei der Entstehung und im Verlauf von Staubstürmen aktiv ist, so daß diese Argumentation nur solange gilt, wie die Windgeschwindigkeiten die auf Seite 10 zitierte Schwelle für das Aufwirbeln von Staub nicht erreichen. Dies ist aber die meiste Zeit des Jahres durchaus gegeben, und einmal auf ebenem Terrain niedergegangener Staub wird dort wahrscheinlich bis zum nächsten Sturm liegenbleiben.

In der anschließenden Nacht, wenn wieder ruhige und weitgehend turbulenzfreie Bedingungen herrschen, sinkt von oben mit bescheidener Geschwindigkeit Staub in die hieran stark verarmten untersten Kilometer, während die Sedimentation auf die Oberfläche um ein Vielfaches langsamer verläuft, als sie es während des Tages tat, da sie nun praktisch keine Unterstützung mehr durch turbulenten Transport erfährt.

Kompliziert wird dieses Bild noch durch den Umstand, daß die Fallgeschwindigkeit der einzelnen Teilchen nicht konstant ist, wie sie es der Stokesschen Widerstandsformel zufolge wäre, sondern mit sinkendem Druck — also wachsender Höhe — stark zunimmt (siehe Abschnitt 6).

In der vorliegenden Arbeit werden das Absinken des Staubes und das anschließende Ausfallen auf die Oberfläche mit Hilfe eines eindimensionalen K-ε-Modells für die turbulente Planetare Grenzschicht des Mars simuliert.

Kapitel 2

Thermodynamisches

2.1 Die Potentialtemperatur

Die Temperatur vertikal bewegter Gasmassen — man denke etwa an turbulente Durchmischung oder auf- oder absteigende atmosphärische Strömungen an einer Steigung — ändert sich nicht nur durch Austausch von Wärme mit der Umgebung (sogenannte *diabatische Heizung*), sondern auch durch Kompressions- und Entspannungsvorgänge. So kühlt ein Gaspaket beim Aufsteigen in der Marsatmosphäre um etwa 4.5 K/km — den *adiabatischen Temperaturgradienten* — ab, da es entspannt wird und dabei Arbeit gegen den Atmosphärendruck verrichtet. Um diesen Teil der Energiebilanz von den physikalisch weit interessanteren diabatischen Heiz- und Kühleffekten besser trennen zu können, wurde in der Meteorologie der Begriff der *Potentialtemperatur* eingeführt. Die Potentialtemperatur θ ist definiert als die Temperatur, die ein in der Höhe z befindliches Gaspaket hätte, wenn man es adiabatisch vom Druck $p(z)$ auf den Oberflächendruck p_s komprimieren würde.

Wenn ein atmosphärisches Volumen A eine höhere Potentialtemperatur besitzt als ein Volumen B, so wäre A heißer, wenn man beide adiabatisch auf gleiche Höhe brächte. Aus diesem Grund ist der Gradient $\partial\theta/\partial z$ der Potentialtemperatur ein Stabilitätsmaß: für $\partial\theta/\partial z > 0$ ist die Atmosphäre thermisch *stabil geschichtet*, denn ein Gaspaket wird bei einem adiabatischen Ausflug in höhere Schichten kälter sein als

seine Umgebung und somit wieder zurücksinken. Wenn $\partial\theta/\partial z = 0$ ist, spricht man von *neutraler Schichtung*. Bei $\partial\theta/\partial z < 0$ schließlich liegt thermisch *instabile Schichtung* vor, jetzt ist das aufgestiegene Gasvolumen wärmer und leichter als seine Umgebung und wird somit noch weiter nach oben beschleunigt; andere Gaspakete sinken entsprechend immer schneller nach unten — mit einem Wort: *Konvektion* setzt ein.

Diese gleicht nun umgekehrt die Potentialtemperatur in der konvektiv durchmischten Schicht an, da sie immer wieder Gasvolumina aus verschiedenen Schichten auf ein und der selben Höhe zum Wärmeaustausch bringt. Diese Angleichung kann man sehr gut in Abbildung 7.10 sehen.

Um die Potentialtemperatur zur thermodynamischen Temperatur T in Beziehung zu setzen, gehen wir vom Ersten Hauptsatz der Thermodynamik aus, welcher in der hier benötigten Form Enthalpie H, Entropie S und Molvolumen V in folgender Weise verknüpft:

$$dH = T\,dS + V\,dp\ . \tag{2.1}$$

Für die oben genannte adiabatische Verschiebung eines atmosphärischen Volumens ist $dS = 0$, außerdem ist per definitionem $dH = c_p\,dT$ und nach dem idealen Gasgesetz gilt $V = RT/p$.[1] Damit wird der Erste Hauptsatz in unserem Fall zu

$$c_p \frac{dT}{T} = R\frac{dp}{p}\ . \tag{2.2}$$

Integration vom Druck p zum Druck p_s (also von der Temperatur T zur Temperatur θ) führt auf

$$\boxed{\int_T^\theta \frac{c_p(T')}{T'}\,dT' = R\ln\frac{p_\mathrm{s}}{p}}\ ; \tag{2.3}$$

das ist die gesuchte Umrechnungsformel zwischen T und θ.

[1] Wie in der physikalischen Chemie üblich, bezeichnen wir hier die molare Wärmekapazität mit c_p und die universelle Gaskonstante mit R; die entsprechenden massebezogenen Größen versehen wir mit einer Tilde: $\tilde{c}_p := c_p/\mu$, $\tilde{R} := R/\mu$, wobei μ die Molmasse bezeichnet.

Für die Erdatmosphäre ist $\tilde{c}_p \approx 29.10\,\mathrm{J/(Mol\,K)}$ annähernd konstant über den meteorologisch bedeutsamen Temperaturbereich. In diesem Fall läßt sich (2.5) sofort integrieren und man erhält in Übereinstimmung mit der Poissonschen Gleichung für adiabatische Prozesse

$$\theta(z) = T(z) \cdot \left(\frac{p_\mathrm{s}}{p(z)} \right)^{\frac{R}{c_p}} \quad , \tag{2.4}$$

was in manchen Meteorologiebüchern sogar als Definition der Potentialtemperatur angeführt wird.

Für die numerische Anwendung ist eine differentielle Form von (2.3) praktischer, die man leicht erhält, wenn man (2.3) ableitet und die hydrostatische Beziehung $\tilde{R}\, d\ln p = -\, g/T\, dz$ verwendet:

$$\boxed{\tilde{c}_p(\theta)\, d\ln\theta - \tilde{c}_p(T)\, d\ln T = \frac{g\, dz}{T}} \,. \tag{2.5}$$

Die Potentialtemperatur hängt eng mit der Entropie zusammen, wie die leicht herzuleitende Beziehung

$$c_p(\theta)\, d\ln\theta = dS \tag{2.6}$$

zeigt. Wenn nun mit der Volumenheizungsrate q diabatisch geheizt wird (etwa $q = \mathrm{div}\,\mathbf{F}$ mit dem Strahlungsfluß $\mathbf{F}$), so ist $T\, dS/dt = q\mu/\varrho$ und damit

$$\tilde{c}_p(\theta) \frac{d\ln\theta}{dt} = \frac{q}{\varrho} \tag{2.7}$$

oder

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\theta}{T} \frac{q}{\tilde{c}_p(\theta)\varrho} \,. \tag{2.8}$$

Diesem diabatischen Heizungsterm werden wir in (4.36c) wiederbegegnen, wo allerdings zusätzlich noch ein turbulenter Transportterm auftaucht.

Die differentielle Beziehung (2.5) läßt sich auch in der Form

$$\frac{\tilde{c}_p(\theta) T}{\tilde{c}_p(T)\theta} \frac{d\theta}{dz} = \frac{dT}{dz} + \frac{g}{\tilde{c}_p(T)} \tag{2.9}$$

schreiben, aus der sich in Oberflächennähe ein eingängigerer Zusammenhang zwischen T und θ herstellen läßt. Für $\theta - T \ll T$ folgt nämlich

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{dT}{dz} + \frac{g}{\tilde{c}_p} \tag{2.10}$$

und hieraus

$$\theta(z) = T(z) + \Gamma z \ . \tag{2.11}$$

Das Höhenprofil der Potentialtemperatur ist also gleich dem der thermodynamischen Temperatur zuzüglich eines linearen Profils mit dem *adiabatischen Temperaturgradienten* $\Gamma := g/\tilde{c}_p$. Abbildung 7.10 in Kapitel 7 zeigt, daß der Gültigkeitsbereich von (2.11) erstaunlich groß ist und mindestens die untersten $\approx 6\,\mathrm{km}$ der Marsatmosphäre umfaßt.

Um auf dem numerischen Gitter mit den Niveaus z_i Temperatur T_i und Potentialtemperatur θ_i ineinander transformieren zu können, integrieren wir (2.5) von z_{i-1} bis $z_i = z_{i-1} + \delta z$:

$$\frac{g\,\delta z}{T_{i-\frac{1}{2}}} \approx \tilde{c}_p(\theta_{i-\frac{1}{2}}) \ln \frac{\theta_i}{\theta_{i-1}} - \tilde{c}_p(T_{i-\frac{1}{2}}) \ln \frac{T_i}{T_{i-1}} \ , \tag{2.12}$$

was die konkreten Transformationsformeln

$$\theta_i = \theta_{i-1} \cdot e^{\frac{\tilde{c}_p(T_{i-\frac{1}{2}}) \ln \frac{T_i}{T_{i-1}} + \frac{g\,\delta z}{T_{i-\frac{1}{2}}}}{\tilde{c}_p(\theta_{i-\frac{1}{2}})}} \tag{2.13}$$

und

$$T_i = T_{i-1} \cdot e^{\frac{\tilde{c}_p(\theta_{i-\frac{1}{2}}) \ln \frac{\theta_i}{\theta_{i-1}} + \frac{g\,\delta z}{T_{i-\frac{1}{2}}}}{\tilde{c}_p(T_{i-\frac{1}{2}})}} \tag{2.14}$$

liefert, mit denen man sukzessive von der Oberfläche aus (wo die Randbedingung $T_\mathrm{s} = \theta_\mathrm{s}$ gilt) nach oben rechnet. Wenn ein nicht-äquidistantes Gitter benutzt wird (vgl. Abschnitt 5.2), ist in (2.13) und (2.14) jeweils δz durch $z'_{i-\frac{1}{2}}\delta\zeta$ zu ersetzen.

Da der Zwischenwert $\theta_{i-\frac{1}{2}}$ erst a posteriori gemäß $\theta_{i-\frac{1}{2}} := (\theta_{i-1} + \theta_i)/2$ berechnet werden kann, aber in der rechten Seite von (2.13) schon verwendet wird, muß der einzelne Schritt $\theta_{i-1} \longrightarrow \theta_i$ zwei- bis dreimal

iteriert werden; entsprechendes gilt für (2.14). Von allen Iterationen, die im numerischen Programm enthalten sind, ist die hier genannte mit Abstand die am wenigsten problematische (vgl. etwa Abschnitt 5.5.1), was damit zusammenhängt, daß $\tilde{c}_p$ eine gemäßigte Funktion der Temperatur ist (vgl. den folgenden Abschnitt 2.2).

2.2 Die Temperaturabhängigkeit der Wärmekapazität

Während c_p, die Wärmekapazität bei konstantem Druck, in den unteren Schichten der Erdatmosphäre nahezu konstant ist, ändert sie sich unter marsianischen Bedingungen um fast 20 % (vgl. Abbildung 2.1). Dieser Umstand findet in der Literatur zur Marsatmosphäre praktisch keine Erwähnung, und manche Modelle der Plaetaren Grenzschicht des Mars (z. B. Haberle et al., 1993; Savijärvi, 1995) arbeiten ausdrücklich mit der Definition (2.4), was sich vermutlich damit erklären läßt, daß sie aus Modellen für die Erdatmosphäre hervorgegangen sind, in der c_p nur minimal variiert.

Die Marsatmosphäre besteht vor allem aus Kohlendioxid, Stickstoff und Argon (vgl. Tabelle 1.3). Die exakte Zusammensetzung schwankt dabei über das Jahr um einige Prozent, da wechselnde Mengen CO_2 im «Eis» der Polarkappen gebunden werden (vgl. Abschnitt 1.2). Wir legen in diesem Kapitel eine mittlere Zusammensetzung von 95.49 % CO_2, 2.91 % N_2 (hier wurden O_2 und CO dazugezählt, da sie sehr ähnliche Wärmekapazität haben) und 1.60 % Ar zugrunde, was eine mittlere Molekülmasse von $\mu = 43.48 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg/Mol}$ ergibt. In Tabelle 2.1 sind die Rotations- und Schwingungstemperaturen T_{rot}, T_{vib} von CO_2, N_2 und O_2 angegeben.[2] Man sieht, daß die Grundschwingung von N_2 eine sehr hohe Anregungstemperatur besitzt, was der Grund für die oben genannte Konstanz der Wärmekapazität der Erdatmosphäre ist.

Aus den Werten von T_{rot} und T_{vib} lassen sich die Wärmekapazitäten

[2] Die Schwingungstemperatur für einen Oszillator der Kreisfrequenz ω ist durch $kT_{\mathrm{vib}} := \hbar\omega$ definiert, das heißt die Energie des Oszillators im Zustand der Schwingungsquantenzahl n beträgt $E_{\mathrm{vib}} = kT_{\mathrm{vib}}(n+1/2)$. Die Rotationstemperatur ist so definiert, daß ein Rotator der Drehimpulsquantenzahl l die Energie $E_{\mathrm{rot}} = kT_{\mathrm{rot}}l(l+1)$ besitzt.

Molekül	T_{rot}	g	T_{vib}	g
CO_2	0.57 K	2	961 K	2
			1 924 K	1
			3 379 K	1
Ar	—		—	
N_2	2.92 K	2	3 352 K	2
O_2	2.11 K	2	2 238 K	2
CO	2.82 K	2	3 080.7 K	2

Tabelle 2.1: Rotationstemperatur T_{rot} und Schwingungstemperatur T_{vib} mit ihrem jeweiligen statistischen Gewicht g für die wichtigsten Moleküle der Marsatmosphäre [Nach Lechner, 1992]

T [K]	$\tilde{c}_p\,[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}}]$	γ
120	674.02	1.40
140	684.27	1.39
160	698.99	1.38
180	717.16	1.36
200	737.54	1.35
220	759.06	1.34
240	780.93	1.32
260	802.62	1.31
280	823.81	1.30
300	844.30	1.29

$$c_p(T) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n \left(\frac{T - 210\,[\mathrm{K}]}{90\,[\mathrm{K}]} \right) \tag{2.15}$$

$$(120\,\mathrm{K} < T < 300\,\mathrm{K})$$

$$\begin{aligned} a_0 &= 753.254\,, & a_1 &= 88.037 \\ a_2 &= 5.510\,, & a_3 &= -2.946 \\ a_4 &= 0.431\,, & a_5 &= 0.036 \\ a_6 &= -0.035\,, & a_7 &= 0.009 \\ a_8 &= -0.001\,, & a_9 &= 0.000 \end{aligned}$$

Tabelle 2.2: Spezifische Wärmekapazität c_p der Marsatmosphäre. (a) Werte von Wärmekapazität $\tilde{c}_p = c_p/\mu$ und Adiabatenkoeffizient $\gamma = c_p/c_V$ in Abhängigkeit von der Temperatur; (b) Čebyšëv-Koeffizienten für $\tilde{c}_p(T)$. Die Werte basieren auf der universellen Gaskonstanten $R = 8.314\,39\,\mathrm{J/(Mol\,K)}$ und der mittleren Molmasse $\mu = 43.48 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg/Mol}$

c_p gemäß

$$c_p = c_{\mathrm{trans}} + c_{\mathrm{rot}} + c_{\mathrm{vib}} + R \tag{2.16}$$

mit

$$c_{\mathrm{trans}} = \frac{3}{2} R \tag{2.17}$$

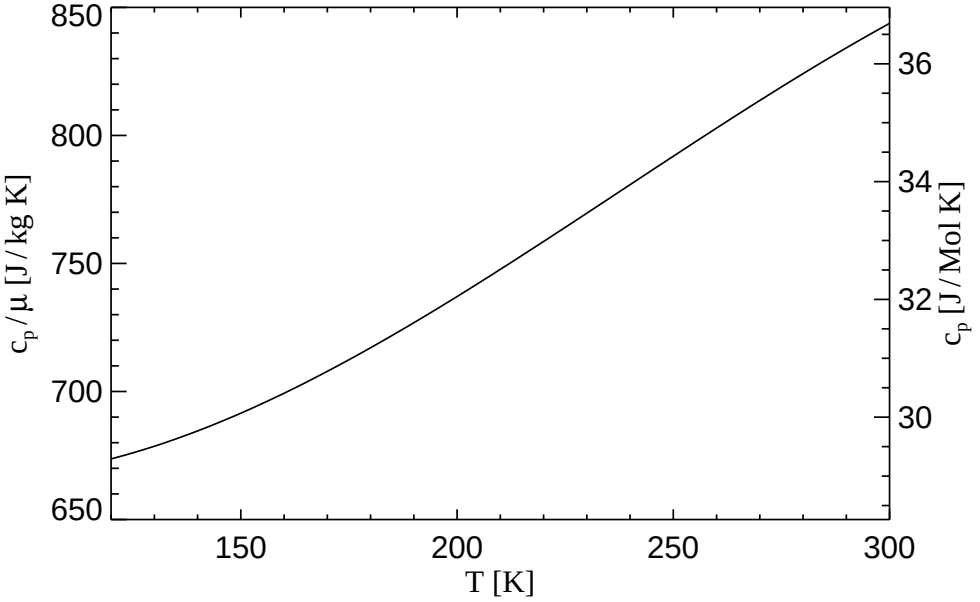

Abbildung 2.1: Wärmekapazität der Marsatmosphäre gemäß (2.22)

$$c_{\mathrm{rot}} = \frac{R}{2}\sum_i g_{\mathrm{rot},i} \qquad (\text{für } T \gg T_{\mathrm{rot}}) \tag{2.18}$$

$$c_{\mathrm{vib}} = R\sum_i g_{\mathrm{vib},i}\left(\frac{T_{\mathrm{vib},i}}{T}\right)^2 \frac{e^{\frac{T_{\mathrm{vib},i}}{T}}}{\left(e^{\frac{T_{\mathrm{vib},i}}{T}}-1\right)^2} \tag{2.19}$$

als Funktion der Temperatur berechnen. Das Ergebnis für die mittlere Zusammensetzung der Marsatmosphäre ist in Abbildung 2.1 gezeigt und auch in Tabelle 2.2a aufgelistet. Um die berechnete Funktion $c_p(T)$ in numerisch effektiver Weise bereitzustellen, habe ich sie auf dem Intervall [120 K, 300 K] nach Čebyšëv[3]-Polynomen $T_n(x)$ entwickelt; die Koeffizienten sind in Tabelle 2.2b angegeben. Bricht man die Entwick-

[3]Um für die annähernd richtige Aussprache des oftmals arg verunstalteten Namens des großen Mathematikers П. Л. Чебышёв eine Lanze zu brechen — die phonetisch richtige deutsche Transkription des Namens wäre ‚Tschebyschóv' — sei hier eine Anekdote von unklarem Wahrheitsgehalt kolportiert:

> Ein russischer Doktorand stellte bei der Disputation seine Arbeit über «Leben und Werk von P. L. Tschébyschev» vor. Im Anschluß an seinen Vortrag bekam er nur eine einzige, vernichtende Frage gestellt: «Welcher Zusam-

lung nach den ersten paar Termen ab, so erhält man folgende Polynomnäherungen (in SI-Einheiten):

$$\tilde{c}_p(T) = 752.3 + 0.946\cdot(T-210) + \vartheta_1\cdot 6.9 \tag{2.20}$$

$$\tilde{c}_p(T) = 748 + 0.98\cdot(T-210) + 1.4\cdot 10^{-3}\cdot(T-210)^2 + \vartheta_2\cdot 3.6 \tag{2.21}$$

$$\tilde{c}_p(T) = 747.7 + 1.076\cdot(T-210) + 1.36\cdot 10^{-3}\cdot(T-210)^2 - 1.62\cdot 10^{-5}\cdot(T-210)^3 + \vartheta_3\cdot 0.55 \tag{2.22}$$

mit $-1 < \vartheta_i < 1$. Die jahreszeitliche Variation in der Zusammensetzung führt auf eine Schwankung der Wärmekapazität von etwa $1\,\mathrm{J/(kg\,K)}$ in $\tilde{c}_p$.

menhang besteht zwischen dem genannten Tschébyschev und dem großen Petersburger Mathematiker P. L. Tschebyschóv?»

Kapitel 3

Strahlung

3.1 Die Planckfunktion

Die spezifische Strahlungsintensität $B_\nu \, d\nu = B_\lambda \, d\lambda$ eines Schwarzen Körpers im Frequenzintervall $d\nu$ berechnet sich nach Planck zu

$$B_\nu = \frac{2h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \tag{3.1}$$

$$B_\lambda = \frac{2hc^2}{\lambda^5 \left(e^{\frac{hc}{kT\lambda}} - 1 \right)} , \tag{3.2}$$

wobei $h = 6.626\,176 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$ das Plancksche Wirkungsquantum, $c = 2.997\,924\,58 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s}$ die Vakuumlichtgeschwindigkeit und $k = 1.380\,662 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J/K}$ die Boltzmannkonstante bezeichnet.

Obwohl die reale Emission eines Objekts natürlich noch von seinen spektralen Eigenschaften abhängt, gibt die Planckkurve (3.1) doch eine gute Vorstellung davon, in welchem Frequenzbereich sie überhaupt erfolgt.

Die Energiebilanz der Marsatmosphäre wird vom auf sie einfallenden Sonnenlicht bestimmt. Dieses wird an der Planetenoberfläche und an atmosphärischen Staubteilchen teilweise absorbiert, was zur Erwärmung der Absorbenten führt. Die dergestalt eingespeiste thermische Energie wird entweder in Form von Wärmestrahlung wieder

abgestrahlt, durch Wärmeleitung an den Boden abgegeben oder konvektiv in höhere Atmosphärenschichten transportiert. Letztlich ist die Infrarotemission der einzig effektive Weg, Energie wieder ins All abzugeben, so daß auf lange Sicht genau so viel Energie im Infraroten abgestrahlt wird, wie im Optischen absorbiert wurde.

Abbildung 3.1 illustriert, wie die vom Mars absorbierte Sonnenstrahlung spektral umverteilt wird. Hier ist νB_ν über $\ln \nu$ aufgetragen, so daß Flächen unter den Kurven als direktes Maß für die Strahlungsintensität interpretiert werden können. Die stark unterschiedlichen mittleren Temperaturen von Sonne und Mars führen dazu, daß sich die beiden Frequenzbereiche praktisch nicht überlappen: Man kann sich demnach im Sichtbaren Licht ganz auf die Extinktion (also Streuung und Absorption) des Sonnenlichts durch Atmosphäre und Oberfläche des Mars beschränken, während im Infraroten Atmosphäre und Oberfläche die einzigen Quellen sind, und die Sonne keine Rolle mehr spielt.

Die Maxima der durch (3.1) und (3.2) gegebenen Planckkurven fallen *nicht* zusammen; für $T = 5700\,\mathrm{K}$ nimmt B_λ sein Maximum bei etwa $\lambda = 524\,\mathrm{nm}$ an, B_ν das seine aber bei $\lambda = 895\,\mathrm{nm}$, was bereits im infraroten Spektralbereich liegt. In diesem Sinn ist die häufig gemachte Behauptung, die Sonne würde im gelben Bereich des Spektrums am meisten Licht emittieren, haltlos und läßt sich nur damit erklären, daß in manchen Kreisen der Wellenlänge als spektraler Variable in recht kritikloser Weise der Vorzug vor der Frequenz gegeben wird.

3.2 Strahlungstransport im Infraroten – Emissivität

Während im vorliegenden Abschnitt die optische «Tiefe» τ von der Oberfläche nach oben gerechnet wird (also $\tau(z{=}0) = 0$, $\tau(z{\to}\infty) = \tau_{\mathrm{gesamt}} > 0$), findet in Abschnitt 3.3 eine andere Definition Verwendung, bei der (wie auch in der Theorie der Sternatmosphären üblich, wo es keine wohldefinierte Oberfläche gibt) τ von oben nach unten gerechnet wird ($\tau(z{\to}\infty) = 0$, $\tau(z{=}0) = \tau_{\mathrm{gesamt}}$). Dies mag verwirrend sein, wenn Formeln aus den beiden Abschnitten verglichen werden, scheint mir aber den jeweiligen Problemstellungen am besten angemessen zu

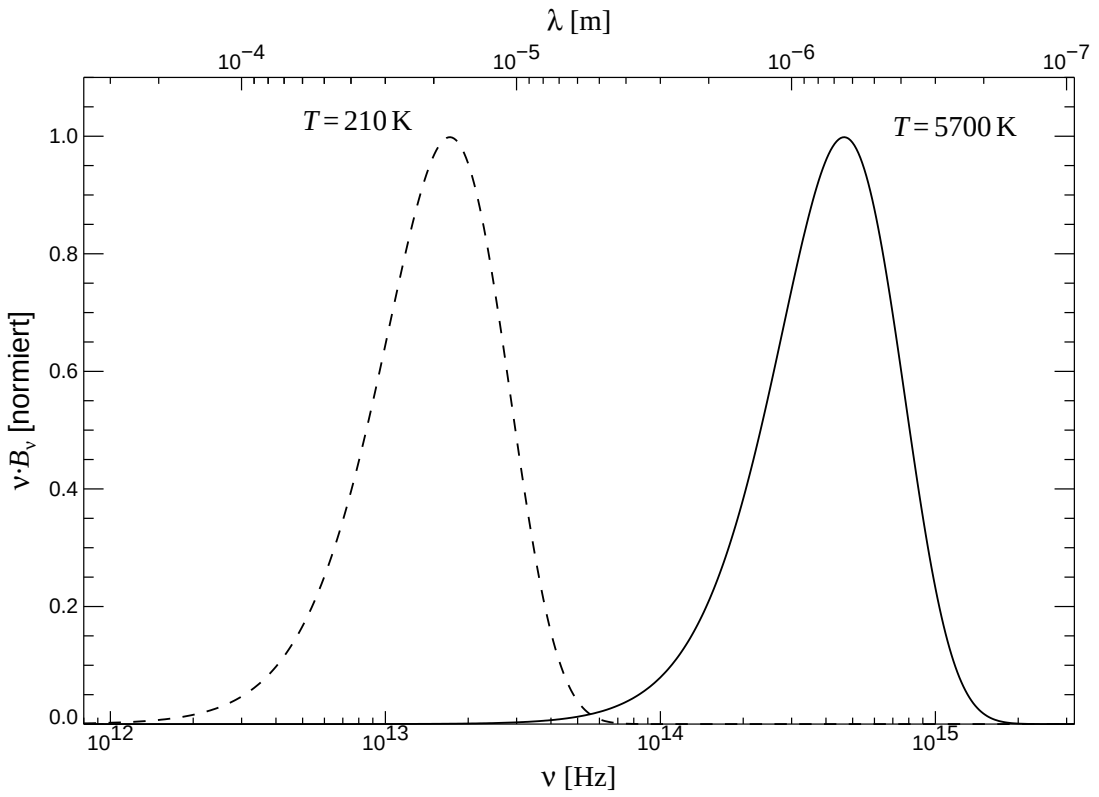

Abbildung 3.1: Die Planckfunktion νB_ν (in willkürlicher Normierung) als Funktion von Frequenz ν oder Wellenlänge λ für Sonnen- (durchgezogene Linie) und Marstemperatur (gestrichelt). In der gewählten halblogarithmischen Auftragung sind die beiden Kurven kongruent zueinander. [Nach Goody und Yung (1989, Fig. 12.17)]

sein: Wenn die Rede wie im vorliegenden Abschnitt im wesentlichen vom infraroten Strahlungstransport ist, so ist der natürliche Ausgangspunkt der Betrachtung die Oberfläche, von der die Strahlung ins All entweicht. Im Fall der Streuung von Licht in der aerosolbefrachteten Atmosphäre hingegen (Abschnitt 3.3) sitzt die Sonne als dominante Strahlungsquelle bei $z \approx \infty$ und ich fände es irritierend, die Extinktion der direkten Einstrahlung mit $e^{\tau/|\mu_\odot|}$ anstatt $e^{-\tau/|\mu_\odot|}$ zu beschreiben.

Der infrarote Strahlungstransport in der Marsatmosphäre wird vor allem vom atmosphärischen CO_2 und, weniger stark, vom Staub bestimmt. Von den Absorptionsbändern des Kohlendioxids spielt fast nur das 15μm-Band eine Rolle, das gerade in dem Wellenlängenbereich liegt, in dem die thermische Emission bei $T \approx 210\,\mathrm{K}$ maximal ist; das nächstschwächere Absorptionsband liegt bei 4.3 μm und somit bereits

weit im Flügel der Planckkurve (siehe Abbildung 3.1). Das 15μm-Band wird durch den Übergang zwischen zwei Rotationszuständen des CO_2-Moleküls im ersten Schwingungszustand verursacht und ist sehr komplex strukturiert, wie in den Abbildungen 3.2 und 3.3 zu sehen ist.

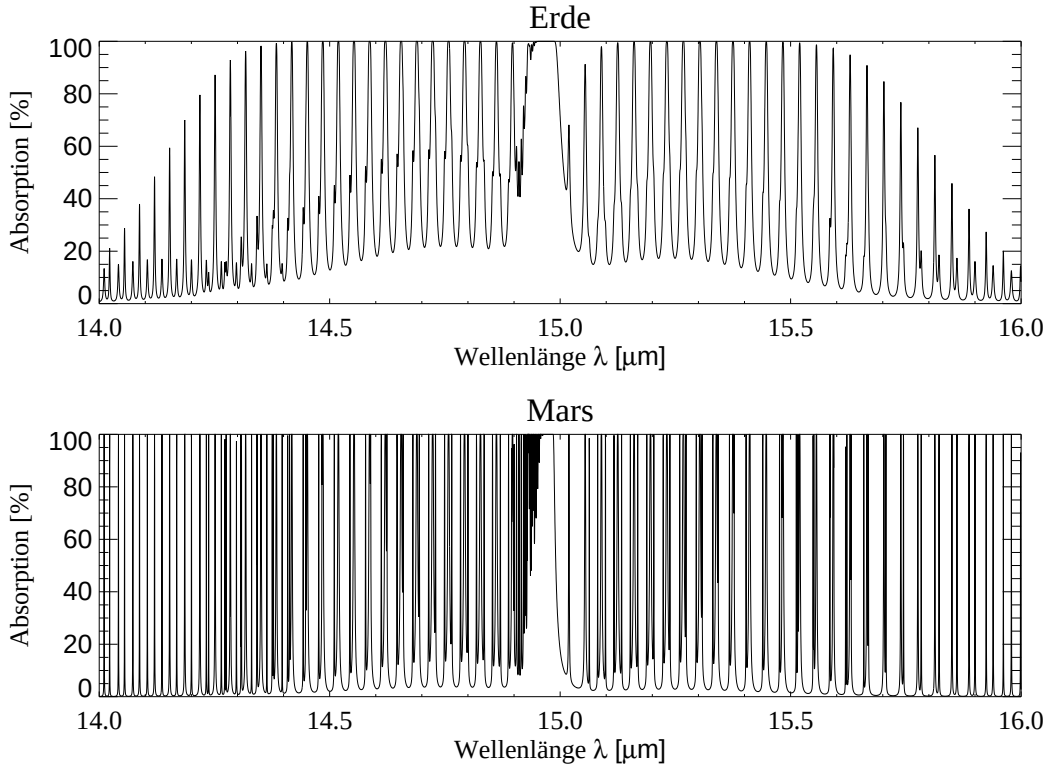

Abbildung 3.2: Absorption von Infrarotstrahlung durch CO_2 in Erd- und Marsatmosphäre nach Daten aus der HITRAN-Datenbank (Rothman et al., 1992). Die Graphiken sind nur qualitativ richtig, da die Höhenabhängigkeit der Linienprofile nur sehr grob berücksichtigt wurde

Die Gleichung für den Strahlungstransport in einer ebenen, eindimensionalen[1] Atmosphäre lautet

$$\cos\vartheta \frac{dI_\nu}{dz} = -k_\nu I_\nu \ + \ k_\nu S_\nu \ , \tag{3.3}$$

wobei ϑ der Winkel der Strahlrichtung gegen die z-Richtung ist, I_ν die spektrale Strahlungsintensität in dieser Richtung (Energiestromdichte

[1]Eindimensional heißt hier, daß $\partial I_\nu / \partial x \equiv \partial I_\nu / \partial y \equiv 0$ für alle Strahlrichtungen (ϑ, φ) gilt

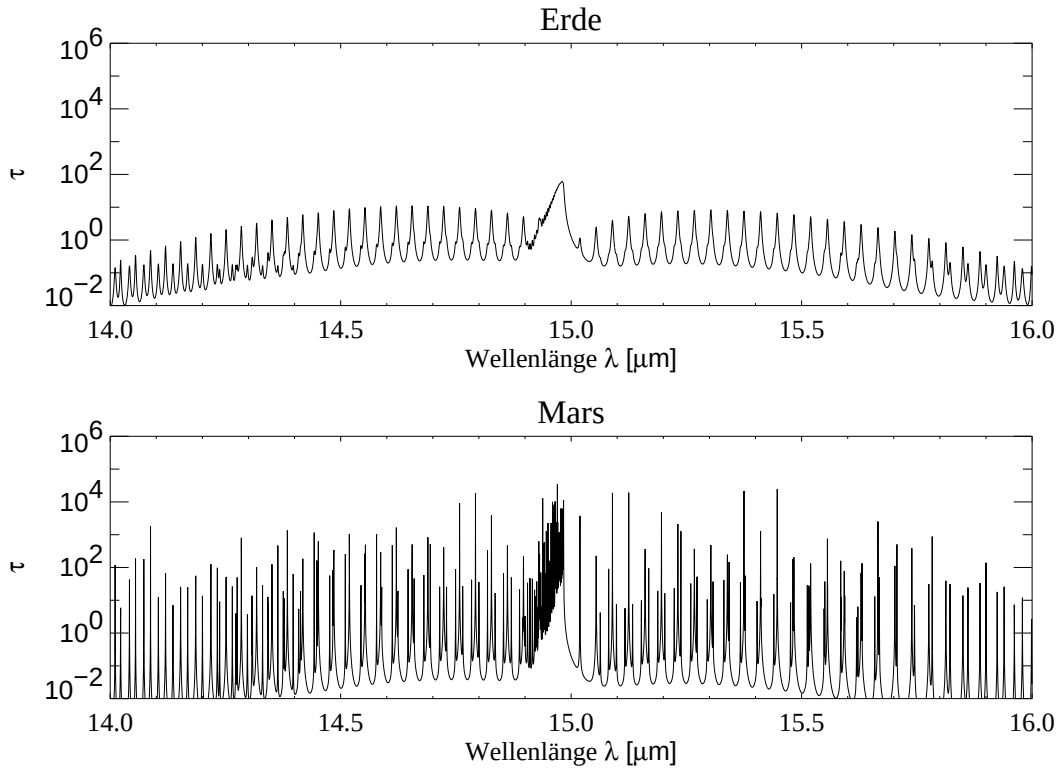

Abbildung 3.3: Wie Abbildung 3.2, aber für die totale optische Dicke

pro Raumwinkel und Frequenzintervall), k_ν der Volumenabsorptionskoeffizient (inverse freie Weglänge der Photonen) und $k_\nu S_\nu$ die Volumenquellfunktion (emittierte Leistung pro Volumen, Raumwinkel und Frequenzintervall). Wenn wir die optische Tiefe τ_ν einführen,

$$\tau_\nu = \tau_\nu(z) = \int_{+0}^{z} k_\nu(z')dz' \ , \qquad \text{d. h.} \quad k_\nu = \frac{d\tau_\nu}{dz} \ , \tag{3.4}$$

und die Abkürzung

$$\mu := \cos\vartheta \tag{3.5}$$

benutzen, können wir (3.3) in der Form

$$\boxed{\mu\frac{dI_\nu}{d\tau} \ = \ -I_\nu \ + \ S_\nu} \ , \tag{3.6}$$

schreiben. Der Kürze halber lassen wir bei τ den Index ν weg, was

nichts daran ändert, daß die optische Tiefe im allgemeinen stark frequenzabhängig ist.

Gleichung (3.6) läßt sich (mit Hilfe der Greenschen Funktion oder durch Bestimmen einer Partikulärlösung) in Integralform überführen; für Abstrahlung nach oben, $\mu>0$, ergibt sich

$$I_\nu(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} S_\nu(\tau')\, e^{-\frac{\tau-\tau'}{\mu}}\, \frac{d\tau'}{\mu} = S_{\nu,\mathrm{s}}\, e^{-\frac{\tau}{\mu}} + \int_0^{\tau} S_\nu(\tau')\, e^{-\frac{\tau-\tau'}{\mu}}\, \frac{d\tau'}{\mu}\ , \quad (3.7)$$

für Einstrahlung von oben, $\mu<0$ hingegen

$$I_\nu(\tau) = \int_{\tau}^{\tau_\infty} S_\nu(\tau')\, e^{-\frac{\tau'-\tau}{|\mu|}}\, \frac{d\tau'}{|\mu|}\ . \quad (3.8)$$

In beiden Fällen kann man der atmosphärischen Schicht zwischen τ und τ' (bzw. zwischen z und z') eine Richtungs-*Transmissivität* D_ν gemäß

$$D_\nu(z', z; \mu) = e^{-\frac{|\tau'_\nu - \tau_\nu|}{|\mu|}} \quad (3.9)$$

zuordnen, die angibt, wieviel von der bei τ' in Richtung μ emittierten Strahlung bei τ noch ankommt.

Wenn die Quellfunktion S_ν isotrop ist — das ist der Fall, wenn keine Streuung stattfindet, sondern vollständige Absorption und Thermalisierung der Strahlungsenergie im Verein mit hierzu unkorrelierter thermischer Emission – kann man über die obere und untere Hemisphäre getrennt integrieren und erhält (mit Hilfe der Substitution $x = 1/\cos\vartheta$) für den Aufwärtsfluß $F^\uparrow$

$$F_\nu^\uparrow := \int_{(2\pi)^\uparrow} I_\nu \cos\vartheta\, d\omega \quad (3.10)$$

$$= 2\pi\, S_{\nu,\mathrm{s}} \int_1^\infty \frac{e^{-\tau x}}{x^3}\, dx + 2\pi \int_0^\tau S_\nu(\tau') \int_1^\infty \frac{e^{-(\tau-\tau')x}}{x^2}\, dx \quad (3.11)$$

$$= 2\pi\, S_{\nu,\mathrm{s}} E_3(\tau) + 2\pi \int_0^\tau S_\nu(\tau')\, E_2(\tau-\tau')\, d\tau' \quad (3.12)$$

$$= \quad 2\pi\Big(S_{\nu,\mathrm{s}} - S_\nu(0)\Big)\,E_3(\tau) + \pi S_\nu(\tau)$$
$$-2\pi \int_0^\tau E_3(\tau-\tau')\,dS_\nu(\tau') \tag{3.13}$$

und für den Abwärtsfluß $F^\downarrow$

$$F_\nu^\downarrow \quad := \int_{(2\pi)^\downarrow} I_\nu \cos\vartheta\, d\omega \tag{3.14}$$
$$= \quad -2\pi \int_\tau^{\tau_\infty} S_\nu(\tau') \int_1^\infty \frac{e^{-(\tau'-\tau)x}}{x^2}\,dx \tag{3.15}$$
$$= \quad -2\pi \int_\tau^{\tau_\infty} S_\nu(\tau')\; E_2(\tau'-\tau)\,d\tau' \tag{3.16}$$
$$= \quad 2\pi\; S_{\nu,\infty} E_3(\tau_\infty-\tau) - \pi S_\nu(\tau)$$
$$-2\pi \int_\tau^{\tau_\infty} E_3(\tau'-\tau)\,dS_\nu(\tau')\;. \tag{3.17}$$

Dabei bezeichnet $S_{\nu,\mathrm{s}}$ die Quellfunktion der Oberfläche, $S_{\nu,\infty}$ die Quellfunktion im Unendlichen; letztere ist nützlich, wenn man einen hochgelegenen Teil der Atmosphäre nicht detailliert mitrechnen will, dieser aber eine nicht vernachlässigbare optische Dicke hat. Man beachte, daß $F^\downarrow$ nach der Definition (3.14) *negativ* ist.

$E_n(\cdot)$ bezeichnet hier die Exponentialintegrale,

$$E_n(z) = \int_1^\infty \frac{e^{-zx}}{x^n}\,dx = z^{n-1}\int_z^\infty \frac{e^{-t}}{t^n}\,dt\;, \tag{3.18}$$

für die unter anderem die Rekursionsformel

$$\frac{dE_n(z)}{dz} = -E_{n-1}(z) \tag{3.19}$$

gilt (siehe Abramowitz und Stegun, 1984). Auch (3.13) und (3.17) beinhalten eine Transmissivität, nämlich

$$D_\nu(z',z) = 2\,E_3(|\tau'_\nu - \tau_\nu|) \tag{3.20}$$

Um konkret den Strahlungstransport durch atmosphärische Gase (insbesondere CO_2) im Infraroten zu behandeln, nehmen wir jetzt lokales thermodynamisches Gleichgewicht in dem Sinne an, daß die optisch aktiven Freiheitsgrade der Gasmoleküle (also Schwingung und Rotation) genügend stark aneinander und an ihre thermische Bewegung gekoppelt sind, so daß man alle durch eine Temperatur $T(z,t)$ beschreiben kann.[2] Außerdem schließen wir Streuung aus (die im Infraroten auch wirklich keine große Rolle spielt) und finden unter diesen Annahmen, daß

$$S_\nu(\vartheta,\varphi;z) \equiv B_\nu(z) \ . \tag{3.21}$$

Das bedeutet, daß S_ν ist isotrop und gleich der lokalen Planckfunktion B_ν aus (3.1) ist.

Wenn wir nun die über ein Frequenzband $\Delta\nu$ integrierten Größen

$$F^{\uparrow\downarrow} := \int\limits_{\Delta\nu} I_\nu^{\uparrow\downarrow}\, d\nu \ , \qquad B(z) := \pi \int\limits_{\Delta\nu} B_\nu(T_z)\, d\nu \ . \tag{3.22}$$

einführen, können wir zur Parametrisierung des sehr komplexen Strahlungstransports im gesamten Band (der sich z. B. in den Linienkernen und im Flügel auf vollkommen verschiedenen Längenskalen abspielt) in Analogie zu (3.20) zwei Transmissivitäten D_B, D_{dB} für das Frequenzintervall $\Delta\nu$ einführen:

$$D_B(z,z';T) \ := \ \frac{\displaystyle\int\limits_{\Delta\nu} D_\nu(z,z') B_\nu(T)\, d\nu}{\displaystyle\int\limits_{\Delta\nu} B_\nu(T)\, d\nu} \tag{3.23}$$

$$D_{dB}(z,z';T) \ := \ \frac{\displaystyle\int\limits_{\Delta\nu} D_\nu(z,z') \left(\frac{dB_\nu}{dT}\right) d\nu}{\displaystyle\int\limits_{\Delta\nu} \left(\frac{dB_\nu}{dT}\right) d\nu} \ , \tag{3.24}$$

[2] Das ist dann der Fall, wenn die Besetzungszahlen der einzelnen Energieniveaus einer Boltzmannverteilung mit der Temperatur T genügen.

wobei $D_\nu(z, z')$ durch (3.20) gegeben ist. D_B und D_{dB} repräsentieren also Frequenzmittel der stark frequenzabhängigen Funktion D_ν (siehe Abbildungen 3.2 und 3.3) mit dem Gewicht B_ν beziehungsweise dB_ν/dT. Der Unterschied zwischen den beiden Gewichtsfunktionen ist in Abbildung 3.4 gezeigt; oft kann man in erster Näherung $D_{dB} \approx D_B$ setzen, da die Gewichtsfunktionen einen ähnlichen Verlauf haben. Eine ausführliche Diskussion der Transmissivitäten, ausgedrückt allerdings in Form der *Emissivitäten*

$$\varepsilon(z, z'; T) := 1 - D_B(z, z'; T) \tag{3.25}$$

$$\varepsilon^*(z, z'; T) := 1 - D_{dB}(z, z'; T) \tag{3.26}$$

findet man bei Rodgers (1967).

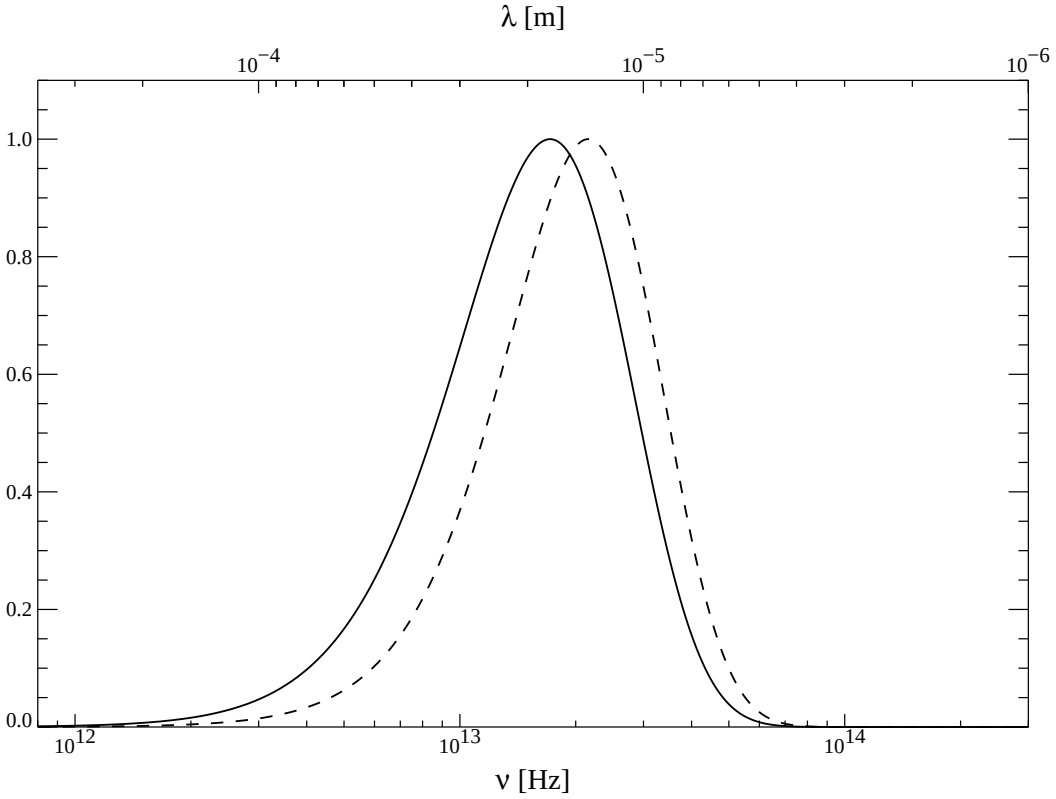

Abbildung 3.4: Die Funktionen νB_ν und $\nu\, dB_\nu/dT$ in jeweils willkürlicher Normierung für die Temperatur $T = 210$ K

Mit den Transmissivitäten D_B, D_{dB} können wir ähnlich den Glei-

chungen (3.12) und (3.16)

$$F^{\uparrow}(z) \quad = \quad B_{\mathrm{s}}\, D_B(0,z;T_{\mathrm{s}}) + \int\limits_{+0}^{z} B(z')\, dD_{dB}(z',z;T_{z'}) \tag{3.27}$$

$$F^{\downarrow} \quad = \quad \int\limits_{z}^{\infty} B(z')\, dD_{dB}(z',z;T_{z'}) \tag{3.28}$$

schreiben.

Mit partieller Integration nehmen (3.27) und (3.28) die Form

$$\begin{aligned} F^{\uparrow}(z) \quad = \quad & B_{\mathrm{s}}\, D_B(0,z;T_{\mathrm{s}}) - B(0)\, D_B(0,z;T_0) \\ & +B(z) \\ & -\int\limits_{+0}^{z} D_{dB}(z',z;T_{z'})\, dB(z') \end{aligned} \tag{3.29}$$

$$\begin{aligned} F^{\downarrow}(z) \quad = \quad & B_{\infty}\, D_B(z,\infty;T_{\infty}) \\ & -B(z) \\ & -\int\limits_{z}^{\infty} D_{dB}(z',z;T_{z'})\, dB(z')\ , \end{aligned} \tag{3.30}$$

an, welche die Notation D_B, D_{dB} verständlich werden läßt.

In dieser Formulierung sind es die Transmissivitäten D_B und D_{dB}, welche die ganzen Details der Struktur des Absorptionsbandes enthalten. Für die Marsatmosphäre wurde eine Parametrisierung der Transmissivitäten durch Temperatur-, Druck- und Dichteprofil von Hourdin (1992) angegeben, die durch Vergleich mit linienauflösenden Rechnungen («line-by-line calculations») optimiert wurde. Zur Berechnung der Transmissivitäten werden in einem Zwischenschritt gemäß

$$\overline{u}(z,z') \quad = \quad \int\limits_{z}^{z'} w_1(T)\, \varrho\, dz'' \tag{3.31}$$

$$\overline{up}(z,z') = \int_z^{z'} w_2(T)\frac{p}{p_0}\varrho\, dz'' \tag{3.32}$$

(3.33)

die Hilfsgrößen $\overline{u}$, $\overline{up}$ berechnet («gewichtete Absorbermengen» — $w_1(T)$, $w_2(T)$ sind Gewichte, die vom Temperaturverlauf $T(z)$ abhängen), aus denen sich dann durch Padé-Interpolation die Transmissivitäten D_B, D_{dB} berechnen.

Zur Verbesserung der Genauigkeit wird dabei das 15μm-Band von CO_2 in drei Teile geteilt, nämlich den Kernbereich $\nu \in [14.2\,\mu\mathrm{m}, 15.7\,\mu\mathrm{m}]$ und die beiden Flügelintervalle $\nu \in [11.6\,\mu\mathrm{m}, 14.2\,\mu\mathrm{m}] \cup [15.7\,\mu\mathrm{m}, 20.0\,\mu\mathrm{m}]$.

Diese Hourdinsche Parametrisierung liegt dem Teil meines numerischen Modells zugrunde, der den Strahlungstransport im Infraroten behandelt. In der Arbeit von Hourdin sind alle nötigen Schritte — bis auf die Diskretisierung — detailliert beschrieben, und nur an einer Stelle ist erhöhte Alarmbereitschaft angezeigt: die Einheiten in (3.31) und (3.31) sind cgs-Einheiten, während sonst in dem ganzen Artikel konsequent das SI verwandt wird (Hourdin, *private Mitteilung*).

3.3 Strahlungstransport im Optischen – die δ-Eddington-Näherung

Wie in Abschnitt 3.1 angemerkt wurde, besteht der Strahlungstransport im sichtbaren Licht praktisch ausschließlich aus Extinktion (also Streuung und Absorption) von einfallendem Sonnenlicht durch Aerosole der Marsatmosphäre und durch die Oberfläche des Mars. Spätestens seit den klassischen Arbeiten von Gierasch und Goody (1968; 1972) ist bekannt, daß die Heizung des atmosphärischen Staubs durch das Sonnenlicht einen entscheidenden Einfluß auf die thermische Struktur der Marsatmosphäre hat.

Das Problem, das sich für mein K-ε-Modell stellt, ist nicht die vollständige Bestimmung des Strahlungsfeldes in den verschiedenen Atmosphärenschichten, sondern lediglich die Berechnung der

Heizungsraten in der Atmosphäre und an der Oberfläche aufgrund der solaren Einstrahlung. Grundsätzlich gibt es eine Vielzahl von Näherungsmethoden zur Lösung der Strahlungstransportgleichung für die gegebene Fragestellung, das Spektrum reicht von simpler Einfachstreuung über Zweistromverfahren (siehe etwa Meador und Weaver, 1980) bis hin zu Vielstromverfahren (Chandrasekhar, 1950; Stamnes und Swanson, 1981) und *doubling-and-adding*-Algorithmen (vgl. Hansen, 1969; Hansen und Travis, 1974). Die erste der genannten Methoden, bei der die Mehrfachstreuung in der Atmosphäre vernachlässigt wird, ist für den Mars nur unter sehr speziellen Bedingungen eine gute Näherung, da seine Atmosphäre selbst unter ruhigen Bedingungen eine optische Dicke von $\tau \gtrsim 0.2$ hat. Meist ist τ noch deutlich höher (so war beispielsweise $\tau \approx 0.5$ während der *Pathfinder*-Mission) und insbesondere wenn das Sonnenlicht schräg einfällt, spielt Mehrfachstreuung eine wichtige Rolle. Die aufwendigen Vielstromverfahren und die *doubling-and-adding*-Methoden erlauben es, das Strahlungsfeld im Prinzip beliebig genau zu berechnen (vorausgesetzt natürlich, daß die optischen Eigenschaften der Aerosole hinreichend genau bekannt sind, was oft nicht der Fall ist). Diese Modelle sind «zu gut» und vor allem zu aufwendig, um sie für die recht grobe Frage nach den Heizungsraten einzusetzen. Als guter Mittelweg haben sich sogenannte Zweistrommodelle erwiesen, zu denen, wenn nicht in seiner Grundidee, so doch von der Struktur der zu lösenden Gleichungen her, auch das von mir verwandte *δ-Eddington-Verfahren* zählt.

3.3.1 Das Strahlungstransportproblem

Das Strahlungstransportproblem stellt sich hier in folgender Weise dar. Die Gleichung

$$-\mu \frac{dI}{d\tau} = -I + J \tag{3.34}$$

für den Strahlungstransport ist für die (schräg) von oben beleuchtete Atmosphäre zu lösen, wobei keine eigenständige Emission, sondern nur Streuung und Absorption des Lichts erfolgt. Hier wurde wieder der Buchstabe $\mu := \cos\vartheta$ für den Kosinus des Zenitwinkels eingeführt, und die Indizes ν wurden der Kürze halber bei der Intensität I, der Quell-

funktion J und der optischen Tiefe τ weggelassen. Wie früher schon angemerkt wurde, wird die optische Tiefe

$$\tau := \int_{z'=z}^{\infty} k \, dz' \tag{3.35}$$

jetzt, anders als in Abschnitt 3.2, von oben nach unten gerechnet, was den Vorzeichenunterschied von (3.34) im Vergleich zu (3.6) erklärt.

Die Heizungsrate ergibt sich aus der Divergenz des Strahlungsflußvektors $\mathbf{F}$,

$$h_\nu := \operatorname{div} \mathbf{F} = -\int \frac{dI_\nu}{d\mathbf{s}} \, d\omega_\mathbf{s} = 4\pi k(\bar{I}_\nu - \bar{J}_\nu) \; , \tag{3.36}$$

wobei

$$\bar{I} := \int I \, \frac{d\omega}{4\pi} \tag{3.37}$$

die *mittlere Intensität* bezeichnet ($d\omega$ ist das Raumwinkelelement) und $\bar{J}$ analog definiert ist.

Die Streuung an einem Aerosolteilchen wird durch

$$J = a \int P(\mu, \varphi; \mu', \varphi') I(\omega') \, \frac{d\omega'}{4\pi} \tag{3.38}$$

beschrieben, wobei a die sogenannte *Einfachstreualbedo* («single-scattering albedo») und $P(\mu, \varphi; \mu', \varphi')$ die Phasenfunktion bezeichnet, die gemäß

$$\int P \, \frac{d\omega}{4\pi} = 1 \tag{3.39}$$

auf 4π normiert ist. Wir machen die für den Marsstaub vernünftige Annahme, daß die Teilchen annähernd zufällig ausgerichtet sind (in der Erdatmosphäre weichen vor allem flache Eiskristalle von dieser Isotropie ab, was sich zum Beispiel im Phänomen der *Nebensonne* äußert, aber in der Energetik keine Rolle spielt) und betrachten die Phasenfunktion als über alle möglichen Teilchenorientierungen gemittelt. Dann können wir

$$P(\mu, \varphi; \mu', \varphi') = P(\cos \Theta) \tag{3.40}$$

schreiben, wobei Θ einfach der Winkel zwischen den Richtungsvektoren $\mathbf{e}_{\mu,\varphi}$ und $\mathbf{e}_{\mu',\varphi'}$ ist,

$$\cos\Theta = \mu\mu' - \sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu'^2}\,\cos(\varphi-\varphi') \; . \tag{3.41}$$

Schließlich führen wir den Asymmetriefaktor g ein,

$$g := \int P(\Theta)\cos\Theta\,\frac{d\omega}{4\pi} \; , \tag{3.42}$$

der für reine Vorwärtsstreuung den Wert $+1$, für isotrope Streuung den Wert 0 und für reine Rückwärtsstreuung den Wert -1 annimmt, und für den die durchaus nichttriviale Beziehung

$$\int \mu\, P(\mu,\varphi;\mu',\varphi')\,\frac{d\omega}{4\pi} = g{\cdot}\mu' \tag{3.43}$$

gilt.

Nun spalten wir die Gesamtintensität I_{ges} auf in die *direkte Intensität* $I_\odot$ — also die ohne Richtungsänderung von der Sonne einfallende Strahlung — und die *diffuse Intensität* $I_{(\text{diffus})}$. Die Höhenabhängigkeit von $I_\odot$ ist offensichtlich

$$I_\odot(\tau) = F_\odot\,\delta(\mu-\mu_\odot)\delta(\varphi-\varphi_\odot)e^{-\tau/|\mu_\odot|} \tag{3.44}$$

wenn $\mu_\odot$ den Kosinus der Zenitdistanz und $\varphi_\odot$ den Azimut der Sonne bezeichnen. Im folgenden sollte man stets im Gedächtnis behalten, daß $\mu_\odot$ negativ ist; dies wird in der Literatur zum Teil anders gehandhabt, was zu unterschiedlichen Vorzeichen in manchen Formeln führt. Ich werde von nun an den Index ‹(diffus)› weglassen, mit I, F, und so fort also nur den diffusen Anteil des Strahlungsfeldes bezeichnen.

Damit nimmt die Strahlungstransportgleichung (3.34) die Form

$$-\mu\frac{dI}{d\tau} = -I + a\int P(\mu,\varphi;\mu',\varphi')I(\omega')\,\frac{d\omega'}{4\pi} + aP(\mu,\varphi;\mu_\odot,\varphi_\odot)\frac{F_\odot}{4\pi}e^{-\tau/|\mu_\odot|} \tag{3.45}$$

an.

3.3.2 Die Eddington-Näherung

Die *Eddington-Näherung* besteht nun darin, den Ansatz

$$I(z;\mu,\varphi) \equiv \bar{I}(z) + \frac{3}{4\pi}F(z)\mu \tag{3.46}$$

für die Winkelabhängigkeit des diffusen Strahlungsfeldes in (3.45) einzusetzen, den man als die ersten zwei Terme einer Entwicklung von I nach Kugelflächenfunktionen betrachten kann. Der Faktor $3/(4\pi)$ kommt dabei aus Normierungsgründen ins Spiel, wenn man den *Nettofluß* F in der Form

$$F := \int I\mu \, d\omega \tag{3.47}$$

definiert.

Integration von (3.45) über den vollen Raumwinkel («Bilden des nullten Moments bezüglich des Winkels») liefert

$$\boxed{\frac{dF}{d\tau} = 4\pi(1-a)\bar{I} - af_\odot} \,, \tag{3.48}$$

wobei $f_\odot(\tau) := F_\odot e^{-\tau/|\mu_\odot|}$ gesetzt wurde.

Multipliziert man (3.45) mit μ und integriert dann über den vollen Raumwinkel («Bilden des ersten Moments bezüglich des Winkels»), so erhält man

$$\int \mu^2 \frac{dI}{d\tau} \, d\omega = (1-ag)F - agf_\odot\mu_\odot \; . \tag{3.49}$$

Aus dem Ansatz (3.46) folgt nun sofort

$$\int \mu^2 \frac{dI}{d\tau} \, d\omega = \int \mu^2 \frac{d\bar{I}}{d\tau} \, d\omega = \frac{4\pi}{3} \frac{d\bar{I}}{d\tau} \; ; \tag{3.50}$$

und somit

$$\boxed{\frac{4\pi}{3} \frac{d\bar{I}}{d\tau} = (1-ag)F - ag\mu_\odot f_\odot} \,. \tag{3.51}$$

Die beiden Gleichungen (3.48), (3.51) definieren die *Eddington-Näherung* für das Strahlungsfeld. Sie stellen ein lineares Differentialgleichungssystem für die Funktionen $\bar{I}(\tau)$, $F(\tau)$ dar. Oft ist es praktischer, statt der mittleren Intensität $\bar{I}$ und dem Nettofluß F Aufwärtsfluß $F^\uparrow$ und Abwärtsfluß $F^\downarrow$ als Variable zu verwenden, deren Zusammenhang mit $\bar{I}$ und F durch

$$F^\uparrow \quad := \int\limits_{\mu>0} I\mu \, d\omega = \pi\bar{I} + \frac{F}{2} \tag{3.52}$$

$$F^{\downarrow} \;:=\; \int\limits_{\mu<0} I\mu\, d\omega = -\pi\bar{I} + \frac{F}{2} \tag{3.53}$$

beziehungsweise

$$\bar{I} \;=\; \frac{F^{\uparrow} - F^{\downarrow}}{2\pi} \tag{3.54}$$

$$F \;=\; F^{\uparrow} + F^{\downarrow} \tag{3.55}$$

gegeben ist. Man beachte, daß $F^{\downarrow}$ nach der Definition (3.53) im allgemeinen negativ (da nach unten gerichtet) ist. Auch hier findet man in der Literatur (beispielsweise in den Lehrbüchern von Goody und Yung, 1989, oder Liou, 1992) oft andere Definitionen, was wiederum zu verschiedenen Vorzeichen in gewissen Formeln führt. Transformiert man (3.48), (3.51) auf die neuen Variablen $F^{\uparrow\downarrow}$, so erhält man

$$\frac{dF^{\uparrow}}{d\tau} \;=\; \frac{7-a(4+3g)}{4}F^{\uparrow} - \frac{1-a(4-3g)}{4}F^{\downarrow} - af_{\odot}\frac{2+3g\mu_{\odot}}{4} \tag{3.56}$$

$$\frac{dF^{\downarrow}}{d\tau} \;=\; \frac{1-a(4-3g)}{4}F^{\uparrow} - \frac{7-a(4+3g)}{4}F^{\downarrow} - af_{\odot}\frac{2-3g\mu_{\odot}}{4}\;, \tag{3.57}$$

also ein lineares Differentialgleichungssystem der Form

$$\frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix} F^{\uparrow} \\ F^{\downarrow} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ -\gamma_2 & -\gamma_1 \end{pmatrix}}_{\mathcal{M}} \begin{pmatrix} F^{\uparrow} \\ F^{\downarrow} \end{pmatrix} - af_{\odot}\begin{pmatrix} \gamma_3 \\ 1-\gamma_3 \end{pmatrix}\;. \tag{3.58}$$

Auf die gleiche Struktur führen auch Zweistrommodelle (z. B. das von Sagan und Pollack, 1967) und noch weitere Typen von Strahlungstransportnäherungen, was von Meador und Weaver (1980) ausführlich diskutiert wird.

Wenn wir annehmen, daß die optischen Eigenschaften des Aerosols unabhängig von der Höhe sind, stellt (3.56), (3.57) ein inhomogenes Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten dar. Dessen allgemeine Lösung folgt aus den Eigenwerten $k_{1,2}$ und -vektoren $\mathbf{e}_{1,2}$ der Matrix $\mathcal{M}$, welche sich wie folgt darstellen

$$k_{1,2} \;=\; \pm\sqrt{\gamma_1^2-\gamma_2^2} \;=\; \pm\sqrt{3[a^2g - a(g+1) + 1]} \tag{3.59}$$

$$\mathbf{e}_{1,2} = \begin{pmatrix} \gamma_2 \\ k_{1,2}-\gamma_1 \end{pmatrix} , \tag{3.60}$$

und lautet

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} F^{\uparrow} \\ F^{\downarrow} \end{pmatrix} &= C_1 \mathbf{e}_1 e^{k_1 \tau} + C_2 \mathbf{e}_2 e^{k_2 \tau} \\ &+ \frac{a F_{\odot}}{\frac{1}{\mu_{\odot}^2}-\gamma_1^2+\gamma_2^2} \begin{pmatrix} \gamma_3\left(\frac{1}{|\mu_{\odot}|}-\gamma_1\right) - \gamma_2(1-\gamma_3) \\ \gamma_2\gamma_3 + (1-\gamma_3)\left(\frac{1}{|\mu_{\odot}|}+\gamma_1\right) \end{pmatrix} e^{-\tau/|\mu_{\odot}|} \end{aligned} \tag{3.61}$$

woraus sich der diffuse und der totale Nettofluß zu

$$\begin{aligned} F_{(\mathrm{diff})} &= F^{\uparrow} + F^{\downarrow} = C_1(k_1-(\gamma_1-\gamma_2))e^{k_1\tau} + C_2(k_2-(\gamma_1-\gamma_2))e^{k_2\tau} \\ &\quad + a F_{\odot} \frac{\frac{1}{|\mu_{\odot}|}+(\gamma_1-\gamma_2)(1-2\gamma_3)}{\frac{1}{\mu_{\odot}^2}-\gamma_1^2+\gamma_2^2} e^{-\tau/|\mu_{\odot}|} \end{aligned} \tag{3.62}$$

$$F_{\mathrm{tot}} = F_{(\mathrm{diff})} + F_{\odot}\mu_{\odot} e^{-\tau/|\mu_{\odot}|} , \tag{3.63}$$

ergeben. Die Integrationskonstanten bestimmt man aus den zwei Randbedingungen, daß

$$F^{\downarrow}(\tau{=}0) = 0 , \tag{3.64}$$

also keine diffuse Einstrahlung am oberen Rand der Atmosphäre erfolgt, und

$$F^{\uparrow}(\tau_{\mathrm{s}}) = A\left[-F^{\downarrow}(\tau_{\mathrm{s}}) + F_{\odot}|\mu_{\odot}| e^{-\tau_{\mathrm{s}}/|\mu_{\odot}|}\right] , \tag{3.65}$$

d. h. die aufwärtsgerichtete Strahlung an der Oberfläche von der Streuung von diffusem und direktem Abwärtsfluß an der Oberfläche mit der Albedo A herrührt.

Die hier abgeleiteten Formeln für $F^{\uparrow}$ und $F^{\downarrow}$ stimmen nur in bestimmten Grenzfällen mit den von (Liou, 1992, Abschn. 3.3) angegebenen Lösungen überein; die Kontrollrechnung zeigt, daß im Zweifelsfall Lious Lösung falsch ist, oder auf von ihm nicht genannten Zusatzannahmen gründet.

3.3.3 Die δ-Eddington-Näherung

Atmosphärische Aerosole streuen Licht oft bevorzugt in einen schmalen Winkelbereich um die Vorwärtsrichtung (vgl. Abbildung 3.5) Ein solches Verhalten wird mit der Eddington-Näherung nur sehr schlecht erfaßt, da schon der Ansatz (3.46) scharfe Bündelung des gestreuten Lichts ausschließt. Eine wesentliche Verbesserung kann man im gegebenen Fall aber dadurch erreichen, daß man das innerhalb eines gewissen Kegels nach vorne gestreute Licht so behandelt, als wäre es überhaupt nicht gestreut worden sondern gehörte einfach noch zum direkt einfallenden Lichtbündel. Der Rest des gestreuten Lichtes wird dann wiederum mit der Eddington-Näherung beschrieben, so daß die Gleichungen aus dem vorigen Abschnitt immer noch gelten und lediglich die Größen τ, a, g umskaliert werden.

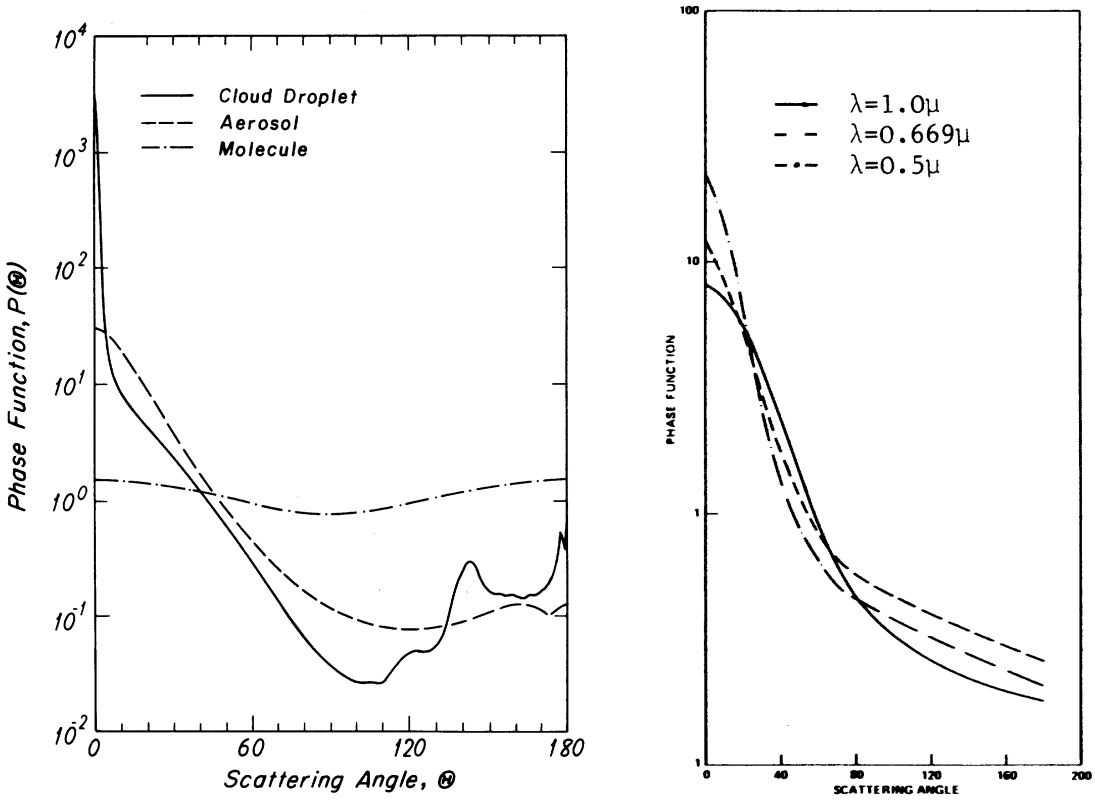

Abbildung 3.5: Phasenfunktion verschiedener (irdischer) atmosphärischer Beimengungen nach Liou (1992) (links) und Phasenfunktion von marsianischem Aerosol nach Pollack (1982) (rechts)

Wenn p den Anteil am gestreuten Licht bezeichnet, der solcherart für nicht gestreut erklärt wird, und $k = -d\tau/dz$ wieder für den Volumenextinktionskoeffizienten steht, so müssen die neuen Koeffizienten a' und k' die Beziehung

$$a'k' = (1-p)ak \; ; \tag{3.66}$$

erfüllen, da ja nur noch der Bruchteil $(1-p)$ des gestreuten Lichtes dem Volumenstreukoeffizienten $k_{\text{streu}} = ak$ zugeschrieben wird. Die Gesamtabsorption ändert sich nicht; sie wird durch den Volumenabsorptionskoeffizienten $k_{\text{abs}} = (1-a)k$ beschrieben, für den demnach

$$(1-a')k' = (1-a)k \tag{3.67}$$

gilt.

Außerdem soll der gesamte Asymmetriefaktor zur Ersatzphasenfunktion [3]

$$P_{\text{Ersatz}}(\cos\Theta) \; = \; \underbrace{p \cdot 2\delta(\cos\Theta - 1^-)}_{\text{Vorwärtsstreuung}} \; + \; \underbrace{(1-p)P'(\cos\Theta)}_{\text{diffuse Streuung}} \tag{3.68}$$

gleich dem ursprünglichen Asymmetriefaktor g sein:

$$p + (1-p)g' = g \; . \tag{3.69}$$

Aus (3.66), (3.67), (3.69) folgen die Ähnlichkeitsbeziehungen für die δ-Eddington-Näherung:

$$\boxed{\begin{aligned} \tau' &= \tau(1-pa) \\ a' &= a\frac{1-p}{1-pa} \\ g' &= \frac{g-p}{1-p} \end{aligned}} \tag{3.70}$$

Für die sehr populäre Henyey-Greenstein-Phasenfunktion

$$P_{\text{H.G.}}(\cos\Theta) = \frac{1-g^2}{(1-2g\cos\Theta+g^2)^{\frac{3}{2}}} = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)g^l P_l(\cos\Theta) \tag{3.71}$$

[3] Die Notation «1^-» ist eine lasche Schreibweise für den linksseitigen Grenzwert gegen 1.

ist die optimale Wahl von p durch

$$p = g^2 \qquad (\text{für } g \geq 0) \tag{3.72}$$

gegeben (Goody und Yung, 1989, Abschnitt 8.4.4), die ich auch für die Computermodelle verwandt habe.

Kapitel 4

Turbulenz

Big whorls have little whorls,
Which feed on their velocity;
And little whorls have lesser whorls,
And so on to viscosity
(in the molecular sense).

Lewis Fry Richardson (1922)

Eine umfassende Theorie der hydrodynamischen Turbulenz ist auch über hundert Jahre nach dem Aufstellen der Navier-Stokes-Gleichung, von der sie letztlich größtenteils beschrieben wird, nicht in Sicht. Dies liegt vor allem an deren Nichtlinearität, die Ursache für eine Fülle von verschiedensten Phänomenen ist, welche sich nicht wie in einer linearen Theorie in einige wenige Grundtypen zerlegen lassen. Nichtsdestotrotz gibt es inzwischen für die einzelnen Bereiche, in denen Turbulenz auftritt, umfangreiche Theorien, die oft genügend nahe an experimentellen Daten aufgebaut wurden, um im Zweifelsfall ungeachtet ihrer nicht immer überzeugenden theoretischen Basis für konkrete Anwendungen geeignet zu sein. Einen plastischen Begriff vom Umfang des angehäuften Wissens bietet das zweibändige Werk von Monin und Yaglom (1973). Konkret auf atmosphärische Anwendungen beziehen sich beispielsweise die Bücher von Panofsky und Dutton (1984), Stull (1988) und Tennekes und Lumley (1972).

4.1 Die Navier-Stokes-Gleichung

Die Navier-Stokes-Gleichung beschreibt die Entwicklung eines Geschwindigkeitsfeldes $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ unter dem Einfluß eines Druckfeldes p und einer Volumenkraft $\mathbf{F}{=}\varrho\mathbf{a}$. Sie lautet (unter gewissen vereinfachenden Annahmen, vgl. Landau und Lifschitz, 1991)

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\,\mathrm{grad})\mathbf{u} = -\frac{1}{\varrho}\,\mathrm{grad}\,p + \mathbf{a} + \nu\Delta\mathbf{u}\;. \tag{4.1}$$

Dabei bezeichnet ϱ die Dichte und $\nu = \eta/\varrho$ die *kinematische Viskosität* (η wäre die *dynamische Viskosität*).

Die zweite Formel von entscheidender Bedeutung für die Struktur der unteren Atmosphäre ist die Wärmeleitungsgleichung

$$c_p\varrho\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\mathrm{grad}\,T\right) = \mathrm{div}(\lambda\,\mathrm{grad}\,T) + q\;, \tag{4.2}$$

wobei $c_p\varrho$ die Wärmekapazität des atmosphärischen Gases pro Volumeneinheit ist, T seine thermodynamische Temperatur, λ seine molekulare Wärmeleitfähigkeit und q die Heizung pro Volumeneinheit.

4.1.1 Die Reynolds-Zahl

In der Hydrodynamik und insbesonderer in der Turbulenztheorie taucht eine Vielzahl von dimensionslosen Parametern auf, von denen im Zusammenhang mit turbulenter Konvektion vor allem zwei eine Rolle spielen, nämlich die Reynolds-Zahl Re und die Richardson-Zahl Ri. Die Reynolds-Zahl

$$\mathrm{Re} = \frac{UL}{\nu} \tag{4.3}$$

ist ein Maß für das Verhältnis von Trägheits- zu viskosen Kräften, also der linken Seite der Navier-Stokes-Gleichung (4.1) zum letzten Term auf der rechten Seite. Dabei stellt U eine charakteristische Geschwindigkeit des Systems dar, L eine charakteristische Länge. Wenn Re einen kritischen Wert von typischerweise einigen 1 000 überschreitet, setzt Turbulenz ein, das heißt, es koppeln sich einzelne Wirbel voneinander ab, deren Dynamik in erster Linie von ihrer Trägheit bestimmt ist, und

die sich gegenseitig zu immer kleineren Wirbeln zermahlen, bis sie bei einer Längenskala l_{visk} angelangt sind, auf der ihre kinetische Energie durch die Viskosität dissipiert wird. Man kann zeigen, daß diese kleinste Wirbelgröße $l_{\mathrm{visk}} \sim \mathrm{Re}^{-\frac{1}{2}} L$ ist. Für atmosphärische Reynoldszahlen, die in der Größenordnung 10^7 oder höher sind,[1] ergeben sich so Wirbelgrößen von unter einem Meter, die aufgelöst werden müßten, wollte man die Navier-Stokes-Gleichung direkt numerisch lösen. Noch klarer wird diese Schwierigkeit, wenn man die Zahl N der Gitterpunkte abschätzt, die in solchen Rechnungen (die notwendigerweise dreidimensional sein müssen) benötigt würden, was auf $N \sim \mathrm{Re}^{\frac{3}{2}}$ führt. Das ist für $\mathrm{Re} \approx 100$ noch machbar, erfordert für $\mathrm{Re} \approx 10^7$ aber einen astronomischen Rechenaufwand und kann daher in dieser Form nicht auf atmosphärische Fragestellungen angewandt werden.

Es besteht also die Notwendigkeit, die Navier-Stokes-Gleichung (zusammen mit den anderen relevanten Gleichungen wie der Kontinuitätsgleichung und der Wärmeleitungsgleichung) nach einer gewissen Vorschrift zu mitteln[2] und dergestalt Gleichungen für bestimmte gemittelte Größen zu erhalten. Dazu stellt man die Variablen $\mathbf{u}$, ϱ, p, T in der Form

$$Var = \overline{Var} + Var' \tag{4.4}$$

durch einen mittleren Wert $\overline{Var}$ und einen fluktuierenden Var' dar, wobei die Reynoldsschen Regeln

$$\overline{Const} = Const\ , \qquad \overline{\overline{Var_1}\, Var_2'} = 0 \tag{4.5}$$

für alle Variablen $Var_{1,2}$ und Konstanten $Const$ gelten sollen.

Das Beschleunigungsfeld $\mathbf{a}$ geht im fest auf der Planetenoberfläche verankerten Bezugssystem auf die Schwerkraft $\varrho\mathbf{g}$ und die Corioliskraft $2\mathbf{u}\times\vec{\Omega}$ zurück ($\vec{\Omega}$ ist dabei der Vektor der Winkelgeschwindigkeit). Die eigentlich auch noch zu berücksichtigende Zentrifugalkraft ist eine Potentialkraft und, da sie sowohl bei Schweremessungen als auch bei der Formung des Geoids/Aroids stets präsent ist, bereits in $\mathbf{g}$ enthalten.

[1] Beispielsweise ergibt sich für die Oberflächenschicht (vgl. Abschnitt 4.3) der Erdatmosphäre $\nu \approx 1.5 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m^2/s}$; $U \approx 5\,\mathrm{m/s}$, $L \approx 100\,\mathrm{m}$. Damit ergibt sich $\mathrm{Re} \approx 3 \cdot 10^7$; in der darüberliegenden gut durchmischten Schicht ist Re noch höher.

[2] Meist wählt man Ensemble-Mittel (und bisweilen zeitliche Mittel).

Unter einigen durchaus nichttrivialen Annahmen lassen sich für eine eindimensional geschichtete Atmosphäre (also bei Vernachlässigung horizontaler Variationen) aus der Navier-Stokes-Gleichung (4.1) und der Wärmeleitungsgleichung (4.2) durch Mittelung die Gleichungen

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{w'u'}\right) + f\left(\overline{v} - v_{\mathrm{geo}}\right) \tag{4.6a}$$

$$\frac{\partial \overline{v}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{w'v'}\right) - f\left(\overline{u} - u_{\mathrm{geo}}\right) \tag{4.6b}$$

$$\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{w'\theta'}\right) + \frac{\overline{\theta}}{T c_p(\theta)\varrho}\, q_{\mathrm{diab}} \tag{4.6c}$$

gewinnen. Dabei ist θ die Potentialtemperatur, also eine abgewandelte Temperatur, in der die Expansionsarbeit $p\,dV$ mit eingerechnet ist (vgl. Abschnitt 2.1), $c_p\varrho$ ist die volumenbezogene Wärmekapazität und q_{diab} die diabatische Volumenheizungsrate, also die Heizung durch Strahlung, chemische Reaktionen und so weiter, aber ohne die mechanische Arbeit $p\,dV$. Der Vektor der Windgeschwindigkeit ist durch u, v und w definiert, wobei u für die Westwindkomponente steht, v für die Südwind- und w für die vertikale Komponente der Geschwindigkeit.

Die Terme $\overline{w'u'}$, $\overline{w'\theta'}$ stellen dabei, wie aus ihrer Rolle in (4.6) ersichtlich ist, turbulente Transportterme dar. Es ist nicht schwer, sich zu überlegen, daß die turbulente Scherspannung τ_{xz} und der turbulente Wärmefluß H sich in der Form

$$\tau_{xz} = \varrho\,\overline{w'u'} \tag{4.7}$$

$$H = c_p\varrho\,\overline{w'\theta'} \tag{4.8}$$

schreiben lassen.

Die Größe

$$E := \frac{1}{2}\,\overline{\mathbf{u}'^2} = \frac{\overline{u'^2+v'^2+w'^2}}{2} \tag{4.9}$$

heißt *turbulente kinetische Energie* — genau genommen handelt es sich um eine spezifische, also massenbezogene Energie — und ist ein direktes Maß für die Intensität der Turbulenz. Multipliziert man die Navier-Stokes-Gleichung (4.1) skalar mit der fluktuierenden Geschwindigkeit

$\mathbf{u}'$ und mittelt dann, so ergibt sich unter den gleichen Annahmen wie oben letztlich (siehe z. B. Sorbjan, 1989)

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \underbrace{-\frac{\partial}{\partial z}(\overline{w'E'} + \frac{\overline{w'p'}}{\varrho})}_{\mathrm{T}} \underbrace{-\left(\overline{w'u'}\,\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} + \overline{w'v'}\,\frac{\partial \overline{v}}{\partial z}\right)}_{\mathrm{S}} + \underbrace{\frac{g}{\overline{\theta}}\,\overline{w'\theta'}}_{\mathrm{B}} \underbrace{-\,\varepsilon}_{\mathrm{D}}\,, \tag{4.10}$$

wobei $E' := \mathbf{u}'^2/2$ gesetzt wurde. Hier stehen die mit Großbuchstaben benannten Terme für den turbulenten Transport (T), die Produktion von Turbulenz durch Geschwindigkeitsscherung (S) und thermischen Auftrieb (B) und schließlich die viskose Dissipation (D) der Turbulenz.

Aus dem meteorologischen Sprachgebrauch hat es sich eingebürgert, Entwicklungsgleichungen vom Typ (4.6), (4.10) als *prognostische Gleichungen* zu bezeichnen, die entsprechenden Variablen $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{\theta}$, $\overline{E}$, und so weiter, als *prognostische Variablen*. Direkte Beziehungen wie (4.13) im nächsten Abschnitt werden im Unterschied hierzu bisweilen *diagnostische Gleichungen* genannt.

4.1.2 K-Modelle und Mischungslänge

Die Gleichungen (4.6) und (4.9) für die ersten Momente von $\mathbf{u}$ und θ und das zweite Moment E von $\mathbf{u}$ enthalten auf den rechten Seiten höhere Momente, für die man ihrerseits ähnliche Entwicklungsgleichungen ableiten kann. Diese neuen Gleichungen bringen aber ihrerseits noch höhere Momente ins Spiel, so daß man es mit einer unendlichen Hierarchie von Differentialgleichungen zu tun hat, die man irgendwo durch zusätzliche Annahmen abbrechen muß. Die Wahl der Gleichungen, die man als Entwicklungsgleichungen mitnimmt, und die Wahl der zusätzlichen Hypothesen, mit denen man das Gleichungssystem abschließt, führen ihrerseits auf eine Hierarchie von Turbulenzmodellen.

Eine der einfachsten Parametrisierungen («Modelle erster Ordnung») besteht darin, daß man die turbulenten Flüsse in Analogie zur molekularen Viskosität und Wärmeleitung über die mittleren Gradienten parametrisiert:

$$\overline{w'u'} = -K_u \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} \tag{4.11}$$

$$\overline{w'\theta'} \quad = \quad -K_u \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial z} \; . \tag{4.12}$$

Die Größen K_u, K_θ werden als *turbulente Diffusionskoeffizienten* bezeichnet und müssen ihrerseits noch parametrisiert werden. Nach ihnen wird dieser Modelltyp *K-Modell* genannt. Im einfachsten Fall setzt man $K = const$, was auf das sogenannte ***Ekman-Modell*** führt. Dieses liefert allerdings nur qualitativ teilweise richtige Ergebnisse und scheitert am quantitativen Vergleich mit atmosphärischen Beobachtungen. Eine weitere Möglichkeit besteht darin, K mittels

$$K \sim l\sqrt{E} \cdot \tag{4.13}$$

auf eine weitere Größe l zurückzuführen, die sogenannte *Mischungslänge*. Diese stellt in etwa das turbulente Analogon zur mittleren freien Weglänge bei molekularen Diffusionsprozessen dar und kann in bodennahen Schichten als proportional zur Höhe angesetzt werden,

$$l \approx \kappa \cdot z \; , \tag{4.14}$$

wobei $\kappa \approx 0.4$ eine universelle Konstante ist, die nach Tódor von Kármán benannt ist.

«Modelle zweiter Ordnung» enthalten auch prognostische Gleichungen für die Korrelationen $\overline{u_i' u_k'}$, $\overline{u_i' \theta'}$ und $\overline{\theta'^2}$, während «Modelle dritter Ordnung» auch noch Entwicklungsgleichungen für sämtliche Dreierkorrelationen $\overline{u_i' u_k' u_l'}$ enthalten und ungeachtet ihrer Erfolge (als klassisches Modell wäre beispielsweise das von André et al., 1978, zu nennen) sehr unübersichtlich und auch in anderer Hinsicht zum Teil problematisch sind (Moeng und Randall, 1984). Modelle wie das weiter unten zu diskutierende K-ε-Modell, in denen als einzige Zweierkorrelation die turbulente kinetische Energie E mit einer prognostischen Gleichung modelliert wird, stellen in dieser Nomenklatur «Modelle der Ordnung $1\frac{1}{2}$» dar.

Modelle dritter Ordnung werden vor allem bei detaillierten Fragestellungen nach den Zweierkorrelationen (also unter anderem den turbulenten Flüssen $\overline{w'u'}$, $\overline{w'\theta'}$ und dem vollen Korrelationstensor $\overline{u_i' u_k'}$ der turbulenten Geschwindigkeit) eingesetzt. Für die schlichteren meteorologischen Fragen sind die wesentlich einfacheren Modelle zweiter

Ordnung oder K-ε-Modelle (siehe Abschnitt 4.4) durchaus ausreichend; in der Rechenzeit sind sie um einen Faktor ≈ 100 effektiver als Modelle dritter Ordnung (Therry und Lacarrère, 1983).

4.2 Die Planetare Grenzschicht

Hoch über der Planetenoberfläche wird die Bewegung der dort so genannten *freien Atmosphäre* im wesentlichen durch ein Gleichgewicht zwischen horizontalem Druckgradienten und Corioliskraft bestimmt,

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} - fv = 0 \tag{4.15}$$

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y} + fu = 0\,, \tag{4.16}$$

wobei $f := 2\Omega \sin\beta$ der sogenannte *Coriolis-Parameter* ist, Ω die Winkelfrequenz der siderischen Rotation des Planeten ($\Omega_{\sigma'} \approx 7.1 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{s}^{-1}$) und β die geographische (bzw. areographische) Breite bezeichnet. Das sich nach (4.15), (4.16) einstellende Kräftegleichgewicht heißt *geostrophisches Gleichgewicht*, die entsprechende Windgeschwindigkeit

$$u_{\mathrm{geo}} = -\frac{1}{f\varrho}\frac{\partial p}{\partial y} \tag{4.17}$$

$$v_{\mathrm{geo}} = \frac{1}{f\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{4.18}$$

geostrophische Geschwindigkeit.

In tieferen Schichten der Atmosphäre wird sich die Windgeschwindigkeit vom geostrophischen Wert an die Randbedingung $u = v = 0$ an der Oberfläche anpassen. Der Bereich, in dem dies geschieht, steht in einer gewissen Analogie zur Prandtlschen Grenzschicht in anderen Bereichen der Hydrodynamik und wird daher *Planetare Grenzschicht* (planetary boundary layer, PBL) genannt. Diese Nomenklatur ist allerdings etwas fragwürdig, insbesondere in Bezug auf den Mars, wo die Dicke der «Grenzschicht» mit bis zu knapp $10\,\mathrm{km}$ bereits der Skalenhöhe von etwa $11\,\mathrm{km}$ nahe kommt. Etwas schärfer kann man die Planetare Grenzschicht als die Schicht der Atmosphäre definieren, die im Lauf des Tages mit der Oberfläche durch turbulenten Transport

Wärme und Impuls austauscht, oder auch, phänomenologischer, als den Bereich der unteren Atmosphäre, der einen deutlichen Tagesgang in Windgeschwindigkeit und Temperatur zeigt.

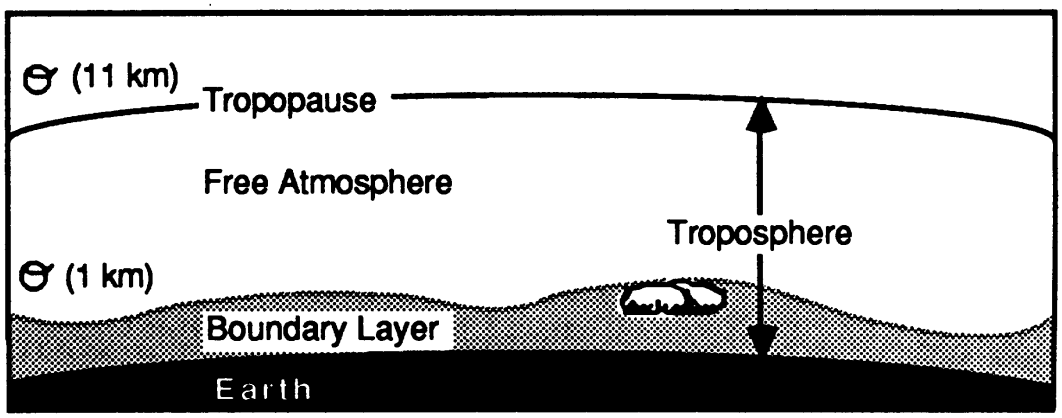

Abbildung 4.1: Schematische Struktur der irdischen Troposphäre [Aus Stull (1988)]

Abbildung 4.1 zeigt grob die Struktur der unteren Erdatmosphäre. Bis etwa 10 km Höhe nimmt die Temperatur nach oben hin ab, dieser Bereich heißt *Troposphäre*. Den untersten Kilometer der Troposphäre bildet die Planetare Grenzschicht, während die darüberliegenden 90 % kaum Tagesvariationen zeigen und die meiste Zeit im geostrophischen Gleichgewicht sind.

In Abbildung 4.2 ist die zeitliche Entwicklung der Planetaren Grenzschicht, wiederum am Beispiel der Erde, skizziert. Nach Sonnenaufgang wird die Oberfläche durch einfallendes Sonnenlicht geheizt und erreicht schließlich eine höhere Temperatur als die darüberliegenden Luftschichten. Dadurch bildet dich zunächst in Bodennähe eine konvektive, turbulent durchmischte Schicht heraus, die rasch anwächst und erst nachmittags bei einer Höhe von etwa 1 km stagniert. Abends beginnt die Turbulenz zu zerfallen, während die Atmosphäre in eine stabile Schichtung übergeht, bis am nächsten Morgen das Spiel von neuem beginnt.

Die Turbulenz in der Planetaren Grenzschicht speist sich aus zwei Quellen, der Geschwindigkeitsscherung und dem Temperaturgradienten. Während die Scherbewegung Turbulenz nur produzieren kann (etwa über die Kelvin-Helmholtz-Instabilität), kann die Tem-

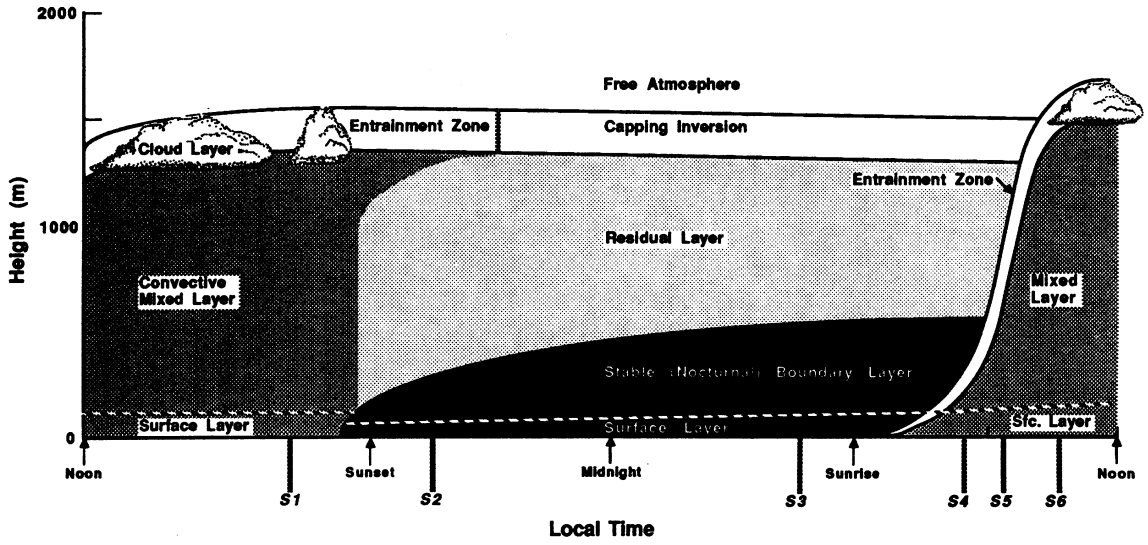

Abbildung 4.2: Tagesgang der Planetaren Grenzschicht der Erde [Aus Stull (1988)]

peraturschichtung je nach Vorzeichen von $\partial\theta/\partial z$ Turbulenz erzeugen ($\partial\theta/\partial z < 0$) oder dämpfen ($\partial\theta/\partial z > 0$), wie man dies an Gleichung (4.10) ablesen kann. Die relative Bedeutung dieser beiden Effekte wird durch die *Richardson-Zahl*[3]

$$\mathrm{Rf} = \frac{g}{\overline{\theta}} \frac{\overline{w'\theta'}}{\overline{w'u'}\,\dfrac{\partial \overline{u}}{\partial z} + \overline{w'u'}\,\dfrac{\partial \overline{u}}{\partial z}} \tag{4.20}$$

charakterisiert, die gerade das Verhältnis der beiden Terme B und S in (4.10) darstellt. Sie ist gleichzeitig ein *Stabilitätsmaß* in dem Sinne, daß ihr Vorzeichen angibt, ob die Atmosphäre thermisch stabil ($\mathrm{Rf}>0$) oder instabil ($\mathrm{Rf}<0$) geschichtet ist.

[3]Genau genommen handelt es sich um die *Fluß-Richardson-Zahl*, die in vielen Modellen zur (der Messung eher zugänglichen und daher weiter verbreiteten) *Gradienten-Richardson-Zahl*

$$\mathrm{Ri} = \frac{g}{\overline{\theta}} \frac{\dfrac{\partial \overline{\theta}}{\partial z}}{\left(\dfrac{\partial \overline{\mathbf{u}}}{\partial z}\right)^2} \tag{4.19}$$

proportional ist.

4.3 Ähnlichkeitstheorie nach Monin und Obuchov

Etwa im untersten Zehntel der konvektiv durchmischten Atmosphäre weichen die Flüsse von Impuls und Wärme um weniger als 10 % von ihren Oberflächenwerten ab. Demnach kann man sie hier in erster Näherung als konstant betrachten, weshalb diese Schicht auch *Schicht konstanter Flüsse* oder auch einfach *Oberflächenschicht* genannt wird. Der Impulsfluß $\vec{\tau}$ stellt eine Scherspannung

$$\vec{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} = \varrho \begin{pmatrix} \overline{w'u'} \\ \overline{w'v'} \end{pmatrix} \tag{4.21}$$

dar, zu deren einfacherer Handhabung die sogenannte *Reibungsgeschwindigkeit* u_* durch

$$|\vec{\tau}| =: \varrho u_*^2 \quad \rightsquigarrow \quad u_* = \sqrt[4]{\overline{w'u'}^{\,2} + \overline{w'v'}^{\,2}} \tag{4.22}$$

eingeführt wird. Der turbulente Wärmefluß ergibt sich zu

$$H = c_p \varrho \, \overline{w'\theta'} \ . \tag{4.23}$$

Aus Dimensionsargumenten folgerten Monin und Obukhov (1954), daß die Schicht konstanter Flüsse nur eine einzige relevante Längenskala besitzt, die durch

$$L = -\frac{u_*^3 \overline{\theta}}{\kappa g \, \overline{w'\theta'}} = -\frac{u_*^3 c_p \varrho \, \overline{\theta}}{\kappa g H} \tag{4.24}$$

gegeben ist und heute *Monin-Obuchov-Länge* heißt. L ist wie die Richardson-Zahl ein Stabilitätsmaß, das heißt für $L>0$ ist die Atmosphäre thermisch stabil geschichtet, für $L<0$ instabil. Weiter besagt die Monin-Obuchovsche *Ähnlichkeitstheorie*, daß der Zusammenhang zwischen den Gradienten von Windgeschwindigkeit und Temperatur und den Flüssen in der Form

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} = \frac{u_*}{\kappa z} \phi_{\mathrm{m}}\left(\frac{z}{L}\right) \tag{4.25}$$

$$\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial z} = -\frac{H}{c_p \varrho u_* \kappa z} \phi_{\mathrm{h}}\left(\frac{z}{L}\right) \tag{4.26}$$

durch die beiden *universellen Funktionen* $\phi_{\mathrm{m}}(\zeta)$, $\phi_{\mathrm{h}}(\zeta)$ gegeben ist. Diese Funktionen, die dimensionslose Gradienten von $\overline{u}$ und $\overline{\theta}$ darstellen, sind so universell, daß es in der Literatur eine Anzahl verschiedener, einander teilweise widersprechender Parametrisierungen für sie gibt (vgl. Dyer, 1974; Etling, 1987). Es scheint allerdings die beruhigende Regel zu gelten, daß sich die Ergebnisse von Modellrechnungen, denen verschiedene Varianten der dimensionslosen Gradienten ϕ_{m}, ϕ_{h} zugrundegelegt werden, bei konsequenter Verwendung derselben (und des zugehörigen Wertes der ebenfalls nur in Anführungszeichen «universellen» Kármán-Konstanten κ) letzten Endes kaum unterscheiden.

Abbildung 4.3 zeigt die Funktionen $\phi_{\mathrm{m/h}}$ zusammen mit einigen Meßdaten.

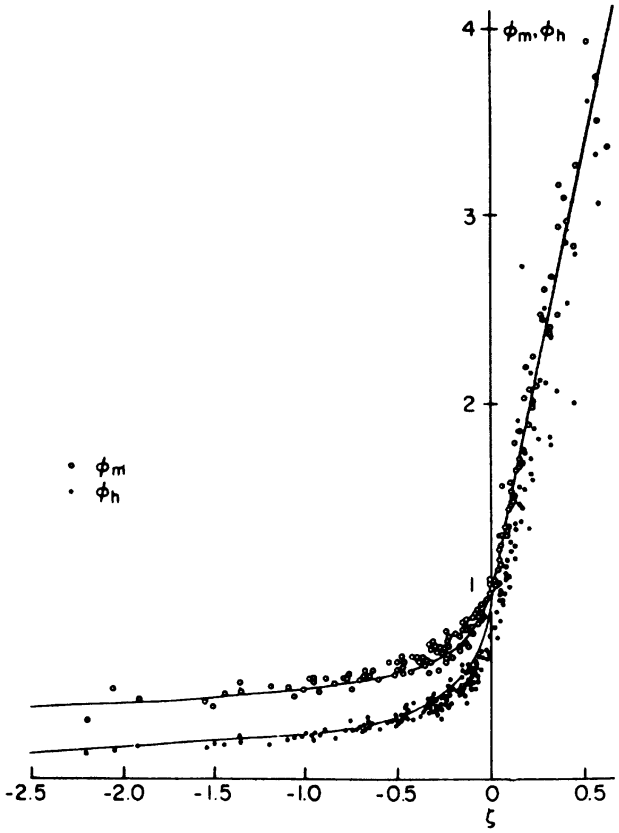

Abbildung 4.3: Die universellen Monin-Obuchov-Funktionen $\phi_{\mathrm{m/h}}$ [Aus Sorbjan (1989)]

Häufig hat die Parametrisierung der Funktionen $\phi_{\mathrm{m/h}}$ die Form

(vgl. die Übersicht von Etling, 1987)

$$\phi_{\mathrm{m}}(\zeta) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-\beta_{\mathrm{m}}\zeta)^{\frac{1}{4}}} & , \zeta < 0 \\ 1+\gamma_{\mathrm{m}}\zeta & , \zeta > 0 \end{cases} \tag{4.27}$$

$$\phi_{\mathrm{h}}(\zeta) = \begin{cases} \dfrac{\alpha_{\mathrm{h}}}{(1-\beta_{\mathrm{h}}\zeta)^{\frac{1}{2}}} & , \zeta < 0 \\ \alpha_{\mathrm{h}}+\gamma_{\mathrm{h}}\zeta & , \zeta > 0 \end{cases} . \tag{4.28}$$

Für die häufig benötigten Integrale (siehe etwa Abschnitt 5.4.1)

$$\chi_{\mathrm{m/h}}(\zeta,\eta_0) := \frac{1}{\kappa}\int_{\eta_0}^{\zeta} \frac{\phi_{\mathrm{m/h}}(\zeta')}{\zeta'}\,d\zeta' , \tag{4.29}$$

ergibt sich dann nach Paulson (1970)

$$\kappa\chi_{\mathrm{m}}(\zeta,\eta_0) = \begin{cases} \ln\dfrac{\zeta}{\eta_0} - \psi_{\mathrm{m}}(\zeta) & , \zeta < 0 \\ \ln\dfrac{\zeta}{\eta_0} + \gamma_{\mathrm{m}}\zeta & , \zeta > 0 \end{cases} \tag{4.30}$$

$$\kappa\chi_{\mathrm{h}}(\zeta,\eta_0) = \begin{cases} \alpha_{\mathrm{h}}\left(\ln\dfrac{\zeta}{\eta_0} - \psi_{\mathrm{h}}(\zeta)\right) & , \zeta < 0 \\ \alpha_{\mathrm{h}}\ln\dfrac{\zeta}{\eta_0} + \gamma_{\mathrm{h}}\zeta & , \zeta > 0 \end{cases} \tag{4.31}$$

mit

$$\begin{aligned} \psi_{\mathrm{m}} &= 2\ln\frac{1+x}{2} + \ln\frac{1+x^2}{2} - 2\arctan x + \frac{\pi}{2} , & x &= (1-\beta_{\mathrm{m}}\zeta)^{\frac{1}{4}} \\ \psi_{\mathrm{h}} &= \ln\frac{1+y}{2} , & y &= (1-\beta_{\mathrm{h}}\zeta)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} . \tag{4.32}$$

Den in der vorliegenden Arbeit dargestellten Ergebnissen liegt die Parametrisierung von Dyer (1974) zugrunde, der die Werte

$$\beta_{\mathrm{m}} = 16 , \qquad \gamma_{\mathrm{m}} = 5 , \tag{4.33}$$

$$\beta_{\mathrm{h}} = 16\,, \qquad \alpha_{\mathrm{h}} = 1\,, \quad \gamma_{\mathrm{m}} = 5\,, \tag{4.34}$$

$$\kappa = 0.411 \tag{4.35}$$

empfiehlt.

4.4 K-ε-Modelle

Das in dieser Arbeit benutzte Turbulenzmodell ist ein sogenanntes K-ε-Modell, also ein Modell, das an die K-Modelle (vgl. Abschnitt 4.1.2) anknüpft, zusätzlich aber die Dissipationsrate ε der turbulenten kinetischen Energie mitführt. Dieser Modelltyp, oft auch E-ε-Modell genannt, wird im Ingenieursbereich häufig angewandt, wo er unter anderem auf Harlow und Nakayam (1967) zurückgeht und hat mit den Arbeiten von Detering und Etling (1985), Duynkerke und Driedonks (1987) und Duynkerke (1988) Einzug in die Atmosphärenphysik gehalten.

Wir lassen ab hier die Querstriche über gemittelten Größen weg, da das Augenmerk nun ausschließlich auf gemittelten Werten liegt. Damit ist das hier verwendete Modell durch die Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(K_u \frac{\partial u}{\partial z}\right) + f\cdot(v - v_{\mathrm{geo}}) \tag{4.36a}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(K_u \frac{\partial v}{\partial z}\right) - f\cdot(u - u_{\mathrm{geo}}) \tag{4.36b}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(K_\theta \frac{\partial \theta}{\partial z}\right) - \frac{\theta}{T c_p(\theta)\varrho}\frac{\partial F}{\partial z} \tag{4.36c}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(K_E \frac{\partial E}{\partial z}\right) + \underbrace{K_u\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right]}_{S} \underbrace{- \frac{g}{\theta} K_\theta \frac{\partial \theta}{\partial z}}_{B} - \varepsilon \tag{4.36d}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(K_\varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial z}\right) + c_1 \frac{\varepsilon}{E}(S + B_+) - c_2 \frac{\varepsilon^2}{E} \tag{4.36e}$$

gegeben, wobei sich die turbulenten Diffusionskoeffizienten K aus

$$K_u = K_\theta = c_\mu \frac{E^2}{\varepsilon}, \qquad K_E = \frac{K_u}{\sigma_E}, \qquad K_\varepsilon = \frac{K_u}{\sigma_\varepsilon} \tag{4.37}$$

berechnen. Das Symbol B_+ steht für den positiven Anteil von B,

$$B_+ := \begin{cases} B\,, & B > 0 \\ 0\,, & B < 0 \end{cases} \quad . \tag{4.38}$$

$(u_{\mathrm{geo}}, v_{\mathrm{geo}})$ ist wieder die geostrophische Geschwindigkeit

$$u_{\mathrm{geo}} = -\frac{1}{f}\frac{\partial p}{\partial y}\,, \qquad v_{\mathrm{geo}} = \frac{1}{f}\frac{\partial p}{\partial x}\,, \tag{4.39}$$

und für die dimensionslosen Konstanten $c_{\ldots}$ werden nach Duynkerke und Driedonks (1987) die Werte

$$c_1 = 1.44, \quad c_2 = 1.92, \quad c_\mu = 0.09, \quad \sigma_E = 1.0, \quad \sigma_\varepsilon = 1.3 \tag{4.40}$$

benutzt. F ist der Strahlungsfluß, so daß $\partial F/\partial z$ die strahlungsbedingte Volumenheizungsrate darstellt.

In (4.36a)–(4.36c) erkennt man unschwer die Gleichungen (4.6a)–(4.6c) wieder. Der Unterschied zur Diskussion in Abschnitt 4.1.2 besteht darin, daß nun $K(z)$ nicht mehr in irgendeiner Weise vorgegeben, sondern aus der turbulenten kinetischen Energie und der Dissipationsrate ε, die nun beide prognostische Variablen sind, gemäß (4.37) berechnet wird.

Der K-Ansatz

$$\overline{w'u'} = -K_u\frac{\partial u}{\partial z} \tag{4.41}$$

$$\overline{w'\theta'} = -K_\theta\frac{\partial \theta}{\partial z} \tag{4.42}$$

hat jetzt auch Eingang in (4.10) gefunden, was auf die angegebene Form von Scherterm S und Auftriebsterm B in Gleichung (4.36d) führt. Außerdem wurden die turbulenten Transportterme $\overline{w'E'}$ und $\overline{w'p'}$ durch

$$\overline{w'E'} + \frac{\overline{w'p'}}{\varrho} = -K_E\frac{\partial E}{\partial z} \tag{4.43}$$

parametrisiert (Monin und Yaglom, 1973; Rodi, 1980). Die prognostische Gleichung (4.36e) liegt in groben Zügen allen K-ε-Modellen zugrunde und ist in ihrer Form und ihren Koeffizienten (die hier von

Duynkerke und Driedonks, 1987, übernommen sind) so eingerichtet, daß bestimmte Grenzfälle mit analytischen oder experimentellen Daten in Einklang sind (siehe auch den nächsten Abschnitt). Die spezielle Form des Terms $c_1 \frac{\varepsilon}{E}(S+B_+)$ in (4.36e) geht auf Duynkerke und Driedonks (1987) und Duynkerke (1988) zurück, die argumentieren, daß B bei stabiler Temperaturschichtung nur die Turbulenz, nicht aber die Dissipation verringern kann und deshalb für $B<0$ im Produktionsterm für ε ausgeschaltet werden sollte.

Aus den Variablen E und ε läßt sich a posteriori eine Mischungslänge

$$l = c_\mu^{\frac{3}{4}} \frac{E^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon} \tag{4.44}$$

berechnen, womit sich der turbulente Diffusionskoeffizient auch als

$$K_u = c_\mu^{\frac{1}{4}} l \sqrt{E} \tag{4.45}$$

schreiben läßt.

K-ε-Modelle sind — wie auch die meisten anderen atmosphärischen Turbulenzmodelle — letztlich nicht kompatibel mit der Ähnlichkeitstheorie nach Monin und Obuchov. Das sieht man etwa daran, daß die turbulenten Diffusionskoeffizienten $K_u = \kappa u_* z/\phi_\mathrm{m}$, $K_\theta = \kappa u_* z/\phi_\mathrm{h}$, die sich aus (4.25), (4.26) ergeben, nicht zueinander proportional sind wie im K-ε-Modell (Gleichung (4.37)), sondern über das Verhältnis $\phi_\mathrm{m}/\phi_\mathrm{h}$ aneinander gekoppelt sind, das recht variabel ist. Es zeigt sich aber, daß die Kombination von Ähnlichkeitstheorie in Oberflächennähe und einem anderen Turbulenzmodell in der Atmosphäre darüber sehr gut funktioniert und die Wahl der Schnittstelle zwischen den beiden Modellen die Ergebnisse nur wenig beeinflußt.

4.4.1 Zerfall der Turbulenz

(4.36) stellt ein System nichtlinearer parabolischer partieller Differentialgleichungen dar und ist als solches, zumal mit den komplizierten Randbedingungen, die hier anzuwenden sind (Abschnitt 5.4.1), der analytischen Lösung wohl kaum zugänglich. Es gibt indessen Spezialfälle, in denen man die räumlichen Variationen ignorieren kann und dann analytisch lösbare gewöhnliche Differentialgleichungen erhält.

Abklingen räumlich homogener Turbulenz ohne Quellen

Für großräumig homogene Turbulenz reduzieren sich (4.36d), (4.36e) auf

$$\frac{dE}{dt} = -\varepsilon \ , \qquad \frac{d\varepsilon}{dt} = -c_2 \frac{\varepsilon^2}{E} \ . \tag{4.46}$$

Die Lösung von (4.46) für $E(t{=}0) =: E_0$, $\varepsilon(t{=}0) =: \varepsilon_0$ ergibt sich leicht zu

$$E(t) = \frac{E_0}{\left(1 + (c_2{-}1)\frac{\varepsilon_0}{E_0} t\right)^{\frac{1}{c_2-1}}} \ , \qquad \varepsilon(t) = \frac{\varepsilon_0}{\left(1 + (c_2{-}1)\frac{\varepsilon_0}{E_0} t\right)^{\frac{c_2}{c_2-1}}} \ , \tag{4.47}$$

was insbesondere

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \left(\frac{E(t)}{E_0}\right)^{c_2} \tag{4.48}$$

beinhaltet. (4.47) führt auf die Asymptotik

$$E(t) = \mathcal{O}(t^{-1.09}) \qquad \text{für } t \to \infty \ , \tag{4.49}$$

was sich mit experimentellen Ergebnissen deckt.

Räumlich homogene Turbulenz mit konstanten Quellen

Ebenfalls analytisch lösen läßt sich der deutlich allgemeinere Fall, in dem die Quellterme S und B von Null verschieden, die Gradienten $\partial \mathbf{u}/\partial z$ und $\partial \ln\theta/\partial z$ aber konstant sind. In diesem Fall erhalten wir

$$\frac{dE}{dt} = (s+b)\frac{E^2}{\varepsilon} - \varepsilon \tag{4.50}$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = c_1(s+b_+)E - c_2\frac{\varepsilon^2}{E} \tag{4.51}$$

mit

$$s = c_\mu \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}\right)^2 \ , \qquad b = -c_\mu \frac{g}{\theta}\frac{\partial \theta}{\partial z} \ . \tag{4.52}$$

Das Symbol b_+ steht wieder für den positiven Anteil von b, vgl. (4.38).

Wenn wir Stationarität $d/dt \equiv 0$ fordern, so folgt aus (4.47)

$$s + b = \frac{\varepsilon^2}{E^2} = \frac{c_1}{c_2}(s + b_+) \ , \tag{4.53}$$

was sich nur nachts erfüllen läßt, wenn $b<0$ ist. Dann folgt

$$1 - \frac{c_1}{c_2} = \frac{-b}{s} \approx 0.2 \,, \tag{4.54}$$

was sich mit der Beobachtung deckt, daß die Richardson-Zahl $\mathrm{Ri} = -b/s$ nachts in etwa den kritischen Wert $\mathrm{Ri}_{\mathrm{cr}} := 1-c_1/c_2 \approx 0.2$ annimmt. Diese Übereinstimmung ist nicht zufällig, sondern war umgekehrt eines der Argumente für die konkrete Wahl von c_1 und c_2.

Allgemeine Zeitentwicklung Das Gleichungssystem (4.50), (4.51) läßt sich für $s, b = const$ auch ganz allgemein lösen. Diese Lösung wurde meines Wissens bisher nicht publiziert und mag insofern eher von akademischem Charakter sein, als sie in erster Linie Eigenschaften der K-ε-Parametrisierung und nicht der realen Turbulenz aufzeigt. Andererseits spiegeln diese Eigenschaften durchaus gewisse physikalische Grenzfälle wieder und haben mir im Laufe der Modellrechnungen auch an manchen Stellen das Verständnis des Modellsystems erleichtert, was für die praktische Arbeit durchaus wichtig ist.

Das System (4.50), (4.51) läßt sich lösen, indem man die neue Variable $y := E/\varepsilon$ einführt, für die sich die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dt} = (c_2-1) - Dy^2 \tag{4.55}$$

ergibt, wobei

$$D := c_1(s+b_+) - (s+b) = \begin{cases} (c_1-1)s - b & , b<0 \\ (c_1-1)(s+b) & , b\geq 0 \end{cases} \;; \tag{4.56}$$

gesetzt wurde. Insbesondere ist $D\geq 0$ falls $s>b$ (und $s\geq 0$, was aber nach (4.52) stets gegeben ist).

Die Lösung von (4.55) für die Anfangsbedingung $E(t=0) =: E_0$, $\varepsilon(t=0) =: \varepsilon_0$ lautet

a.) $\sqrt{\frac{D}{c_2-1}}\frac{E_0}{\varepsilon_0} \neq 1$**:**

$$y(t) = \sqrt{\frac{c_2-1}{D}} \left\{ \begin{matrix} \tanh \\ \coth \end{matrix} \right\} \Big(\gamma(t+t_0)\Big) \qquad \text{für} \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\frac{D}{c_2-1}}\frac{E_0}{\varepsilon_0} < 1 \\ \sqrt{\frac{D}{c_2-1}}\frac{E_0}{\varepsilon_0} > 1 \end{array} \right\} \tag{4.57}$$

mit

$$t_0 = \frac{1}{\sqrt{(c_2-1)D}} \left\{ \begin{matrix} \operatorname{artanh} \\ \operatorname{arcoth} \end{matrix} \right\} \left(\sqrt{\frac{D}{c_2-1}} \frac{E_0}{\varepsilon_0} \right) \tag{4.58}$$

und $\gamma = \sqrt{(c_2-1)D}$. Hieraus ergibt sich dann

$$E(t) = K \frac{\left\{ \begin{matrix} \cosh \\ \sinh \end{matrix} \right\}^{\frac{s+b}{D}} \left(\gamma(t+t_0) \right)}{\left\{ \begin{matrix} \sinh \\ \cosh \end{matrix} \right\}^{\frac{1}{c_2-1}} \left(\gamma(t+t_0) \right)} \tag{4.59}$$

$$\varepsilon(t) = K \sqrt{\frac{D}{c_2-1}} \frac{\left\{ \begin{matrix} \cosh \\ \sinh \end{matrix} \right\}^{c_1 \frac{s+b_+}{D}} \left(\gamma(t+t_0) \right)}{\left\{ \begin{matrix} \sinh \\ \cosh \end{matrix} \right\}^{-\frac{c_2}{c_2-1}} \left(\gamma(t+t_0) \right)} \tag{4.60}$$

$$K_u(t) = c_\mu K \sqrt{\frac{c_2-1}{D}} \left\{ \begin{matrix} \cosh \\ \sinh \end{matrix} \right\}^{\frac{s+b-D}{D}} \left(\gamma(t+t_0) \right) \cdot \left\{ \begin{matrix} \sinh \\ \cosh \end{matrix} \right\}^{\frac{2-c_2}{c_2-1}} \left(\gamma(t+t_0) \right) . \tag{4.61}$$

Während die momentane Tendenz von E, ε und K_u bei $t{=}0$ verschieden ist,

$$\dot{E}(t{=}0) \gtreqless 0 \qquad \text{für} \quad \left(\frac{\varepsilon_0}{E_0} \right)^2 \lesseqgtr s+b \tag{4.62}$$

$$\dot{\varepsilon}(t{=}0) \gtreqless 0 \qquad \text{für} \quad \left(\frac{\varepsilon_0}{E_0} \right)^2 \lesseqgtr \frac{c_1(s+b_+)}{c_2} \tag{4.63}$$

$$\dot{K_u}(t{=}0) \gtreqless 0 \qquad \text{für} \quad \left(\frac{\varepsilon_0}{E_0} \right)^2 \lesseqgtr \frac{s+b-D}{2-c_2} , \tag{4.64}$$

erfolgt die asymptotische Entwicklung aller drei Größen einheitlich entweder gegen 0, gegen einen festen Wert oder gegen Unendlich:

$$(E, \varepsilon, K_u) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} (0,0,0) \\ (K, K\sqrt{\frac{D}{c_2-1}}, c_\mu K \sqrt{\frac{c_2-1}{D}}) \\ (\infty,\infty,\infty) \end{cases}$$

$$\text{für} \quad \frac{b}{s} \lesseqgtr -\mathrm{Ri}_{\mathrm{cr}} = -\left(1-\frac{c_1}{c_2}\right) . \qquad (4.65)$$

In praxi wird für $b/s > -\mathrm{Ri}_{\mathrm{cr}}$ das Anwachsen der Variablen dadurch beschränkt, daß das wachsende K_u den vertikalen Transport immer wichtiger macht und dadurch b/s reduziert wird.

b.) Grenzfall $\sqrt{\frac{D}{c_2-1}}\frac{E_0}{\varepsilon_0} = 1$**:**
Hier ist $y=const$ und

$$E(t) = E_0 e^{\gamma t} \qquad (4.66)$$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{\gamma t} \qquad (4.67)$$

$$K_u(t) = c_\mu \frac{E_0}{\varepsilon_0} e^{\gamma t} \qquad (4.68)$$

mit

$$\gamma = (s+b)\frac{E_0}{\varepsilon_0} - \frac{\varepsilon_0}{E_0} = \frac{1}{(c_2-1)D}\Big(c_2(s+b) - c_1(s+b_+)\Big) \qquad (4.69)$$

$$= \frac{1}{(c_2-1)D}\begin{cases} (c_2-c_1)s + c_2 b & , b<0 \\ (c_2-c_1)(s+b) & , b\geq 0 \end{cases} ; \qquad (4.70)$$

Es ist

$$\gamma \lesseqgtr 0 \quad \text{für } -\mathrm{Ri} \equiv \frac{b}{s} \lesseqgtr -\mathrm{Ri}_{\mathrm{cr}} , \qquad (4.71)$$

was wieder auf die Asymptotik (4.65) führt.

4.4.2 Die vertikale Geschwindigkeit

Wenn sich die unteren Schichten der Atmosphäre erwärmen, werden die darüberliegenden Schichten nach oben geschoben, so daß sich für $z>0$ selbst in den hier betrachteten eindimensionalen Modellen vertikale Geschwindigkeiten $w\neq 0$ ergeben. Aus diesem Grund müßte genau genommen auf den rechten Seite von (4.36) zusätzliche vertikale Transportterme $-w\partial u/\partial z$, $-w\partial u/\partial z$, usw. stehen.

Die vertikale Geschwindigkeit läßt sich dabei unter der Annahme hydrostatischen Gleichgewichts leicht ausrechnen, wenn man bedenkt,

daß ein Masseelement über den Druck identifiziert werden kann (da dieser sich beim vertikalen Verschieben einer eindimensionalen Atmosphäre für das Masseelement nicht ändert):

$$w = \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_p = -\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_z}{\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_t} = \frac{1}{\varrho g}\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_z \tag{4.72}$$

Die Druckänderung $\partial p/\partial t$ läßt sich aus den numerischen Daten bestimmen, so daß man den vertikalen Transport leicht ins Programm einbauen kann. Da sich in den Rechnungen aber zeigte, daß dieser Effekt keine Rolle spielt (die vertikale Geschwindigkeit ist erwartungsgemäß von der Größenordnung $w \sim 1\,\mathrm{cm/s}$), habe ich ihn wieder aus dem Programm herausgenommen.

Kapitel 5

Das numerische Schema

5.1 Das Crank-Nicholson-Schema am Beispiel der Diffusionsgleichung

Das System nichtlinearer parabolischer Differentialgleichungen (4.36) wurde mit einem Finite-Differenzen-Verfahren numerisch gelöst. Um das Prinzip des verwendeten Schemas und die entsprechende Nomenklatur einzuführen, wird im vorliegenden Abschnitt zunächst die numerische Behandlung der allgemeinen linearen Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial u}{\partial z}\right) + q \tag{5.1}$$

diskutiert. Hier sind $\kappa(z,t)$, $\lambda(z,t)$, $q(z,t)$ vorgegebene Funktionen von Ort und Zeit, die für die momentane Betrachtung nicht explizit vom Feld u selbst abhängen. Wir *diskretisieren* das Feld $u(z,t)$, indem wir es auf einem räumlichen Gitter $\{z_k\}$ und einem zeitlichen Gitter $\{t_n\}$ betrachten, die beide äquidistant seien, $z_k = z_0 + k\delta z$, $t_n = t_0 + n\delta t$. Das führt zu den Größen u_k^n, die gemäß

$$u_k^n := u(z_k, t_n) \tag{5.2}$$

den Wert von u an einer bestimmten Stelle des Gitters bezeichnen. Ersetzen wir nun die partiellen Differentialquotienten in (5.1) durch zen-

trale Differenzenquotienten, so erhalten wir die Näherung

$$\frac{\Delta u_k^n}{\delta t} = \kappa_k^{n+\frac{1}{2}} \, \frac{\delta\left(\lambda_k^{n+\frac{1}{2}} \delta \overline{u_k^{n+\frac{1}{2}}}\right)}{\delta z^2} \; + \; q_k^{n+\frac{1}{2}} \tag{5.3}$$

mit

$$\Delta u_k^n \;:=\; u_k^{n+1} - u_k^n \tag{5.4}$$

$$\delta u_k^n \;:=\; u_{k+\frac{1}{2}}^n - u_{k-\frac{1}{2}}^n \tag{5.5}$$

$$\overline{u_k^{n+\frac{1}{2}}} \;:=\; \frac{u_k^n + u_k^{n+1}}{2} \tag{5.6}$$

$$q_k \;:=\; \frac{1}{\delta z} \int\limits_{z_k - \frac{\delta z}{2}}^{z_k + \frac{\delta z}{2}} q(z)\, dt \qquad (\; k = 1, 2, \ldots, N-1 \;) \; . \tag{5.7}$$

Ausgeschrieben lautet das

$$\begin{aligned} \frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\delta t} \;=\; & \frac{\kappa_k^{n+\frac{1}{2}}}{\delta z^2} \left[\lambda_{k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \frac{(u_{k+1} - u_k)^{n+1} + (u_{k+1} - u_k)^n}{2} \right. \\ & \left. - \lambda_{k-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \frac{(u_k - u_{k-1})^{n+1} + (u_k - u_{k-1})^n}{2} \right] + q_k^{n+\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{5.8}$$

Im praktischen Verfahren dient diese Gleichung dazu, aus einem bekannten Zustand $u_{0\ldots N}^n$ zum Zeitpunkt t_n den Zustand $u_{0\ldots N}^{n+1}$ zum Zeitpunkt t_{n+1} zu berechnen. (5.8) ist dann ein lineares Gleichungssystem in den Unbekannten $u_{0\ldots N}^n$, das in der Form

$$\begin{aligned} -\alpha_{k-\frac{1}{2}} u_{k-1}^{n+1} \; + \; (1 + \alpha_{k-\frac{1}{2}} + \beta_{k+\frac{1}{2}}) u_k^{n+1} \; - \; \beta_{k+\frac{1}{2}} u_{k+1}^{n+1} \;=\; & \\ \alpha_{k-\frac{1}{2}} u_{k-1}^n \; + \; (1 - \alpha_{k-\frac{1}{2}} - \beta_{k+\frac{1}{2}}) u_k^n \; + \; \beta_{k+\frac{1}{2}} u_{k+1}^n & \\ + \, \delta t \cdot q_k^{n+\frac{1}{2}} & \end{aligned} \tag{5.9}$$

geschrieben werden kann, die klar macht, daß es sich um ein tridiagonales Gleichungssystem in $u_{0\ldots N}^{n+1}$ handelt, also ein lineares Gleichungssystem, bei dem nur die Hauptdiagonale und ihre beiden Nachbardiagonalen besetzt sind. Zur vollständigen Festlegung des Gleichungssystems müssen noch Randbedingungen bei $z = z_0$ und $z = z_N$ angegeben

werden. Wählen wir der Einfachheit halber die Dirichletschen Randbedingungen

$$u(z_0,t)=c_{\mathrm{b}}(t)\ , \qquad u(z_N,t)=c_{\mathrm{t}}(t)\ , \tag{5.10}$$

so erhalten wir das vollständige System

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\alpha_{\frac{1}{2}} & 1+\alpha_{\frac{1}{2}}+\beta_{\frac{3}{2}} & -\beta_{\frac{3}{2}} & \dots & 0 \\ 0 & -\alpha_{\frac{3}{2}} & 1+\alpha_{\frac{3}{2}}+\beta_{\frac{5}{2}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\beta_{N-\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0^{n+1} \\ u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \vdots \\ u_{N-1}^{n+1} \\ u_N^{n+1} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{\frac{1}{2}} & 1-\alpha_{\frac{1}{2}}-\beta_{\frac{3}{2}} & \beta_{\frac{3}{2}} & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_{\frac{3}{2}} & 1-\alpha_{\frac{3}{2}}-\beta_{\frac{5}{2}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \beta_{N-\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0^{n} \\ u_1^{n} \\ u_2^{n} \\ \vdots \\ u_{N-1}^{n} \\ u_N^{n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{\mathrm{b}}^{n+1} \\ \delta t q_1^{n+\frac{1}{2}} \\ \delta t q_2^{n+\frac{1}{2}} \\ \vdots \\ \delta t q_{N-1}^{n+\frac{1}{2}} \\ c_{\mathrm{t}}^{n+1} \end{pmatrix} \tag{5.11}$$

Hier wurde zur Abkürzung

$$\alpha_{k-\frac{1}{2}} := \frac{\delta t}{2\delta z^2}\kappa_k^{n+\frac{1}{2}}\lambda_{k-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\ , \qquad \beta_{k+\frac{1}{2}} := \frac{\delta t}{2\delta z^2}\kappa_k^{n+\frac{1}{2}}\lambda_{k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\ , \tag{5.12}$$

gesetzt.

Ein tridiagonales Gleichungssystem wie (5.11) kann numerisch wesentlich effektiver gelöst werden als ein System der selben Dimension mit vollbesetzter Matrix. Dies geschieht mit dem Thomas-Algorithmus (vgl. Richtmyer und Morton, 1967; Press et al., 1992), der nur $\mathcal{O}(N)$ Fließkommaoperationen benötigt, während die klassische LU-Zerlegung $\mathcal{O}(N^2)$ Operationen erfordert. Diese numerische Effizienz ist auch einer der Gründe für das spätere Festhalten am Tridiagonalsystem in den einzelnen Variablen im gekoppelten, nichtlinearen Fall trotz der numerischen Probleme, die dies mit sich bringt (vgl. Abschnitt 5.5).

Das bisher vorgestellte Verfahren geht von zentralen Differenzen in der Zeit aus, das heißt der Differenzenquotient $\Delta u_k^n/\delta t$ ist auf den Zeitpunkt $t_{n+\frac{1}{2}}$ zentriert, auf den sich auch die mittleren Werte $\overline{u_k^{n+\frac{1}{2}}}$ beziehen. Dies liefert das sogenannte *Crank-Nicholson-Verfahren*, welches von zweiter Ordnung in der Zeit ist, dessen Fehler also quadratisch mit dem Zeitschritt δt sinkt, $|u_{\text{exakt}}(t) - u_{\text{numerisch}}(t)| = \mathcal{O}(\delta t^2)$. In δz sind alle hier diskutierten Verfahren zweiter Ordnung. Wenn man den Mittelwert $\overline{u_k^{n+\frac{1}{2}}}$ anders gewichtet,

$$\overline{u_k^{n+\frac{1}{2}}} \;:=\; (1-\mu)\, u_k^n + \mu\, u_k^{n+1} \;, \tag{5.13}$$

so bekommt man das *allgemeine implizite Verfahren.* Dieses ist für $\mu \neq 1/2$ nur noch von erster Ordnung in der Zeit, $|u_{\text{exakt}}(t) - u_{\text{numerisch}}(t)| = \mathcal{O}(\delta t)$, hat aber den Vorteil, räumliche Oszillationen rascher dämpfen zu können, was bei manchen Anwendungen entscheidend ist. Man erhält das (immer noch tridiagonale) Gleichungssystem für das allgemeine implizite Verfahren, indem man in (5.9) jeweils links alle α und β mit 2μ multipliziert, rechts hingegen mit dem Faktor $2(1-\mu)$:

$$\begin{aligned} -2\mu\alpha_{k-\frac{1}{2}} u_{k-1}^{n+1} + \left[1+2\mu(\alpha_{k-\frac{1}{2}}+\beta_{k+\frac{1}{2}})\right] u_k^{n+1} - 2\mu\beta_{k+\frac{1}{2}} u_{k+1}^{n+1} \;&=\; \\ 2(1-\mu)\alpha_{k-\frac{1}{2}} u_{k-1}^n + \left[1-2(1-\mu)(\alpha_{k-\frac{1}{2}}+\beta_{k+\frac{1}{2}})\right] u_k^n \;&\\ + 2(1-\mu)\beta_{k+\frac{1}{2}} u_{k+1}^n \quad + \quad \delta t \cdot q_k^{n+\frac{1}{2}} \;.& \end{aligned} \tag{5.14}$$

Das allgemeine implizite Verfahren umfaßt auch die folgenden drei Spezialfälle. Für $\mu{=}1$ ergibt sich das *voll implizite Verfahren*. Im Fall $\mu{=}1/2$ erhalten wir wieder das Crank-Nicholson-Verfahren. Und $\mu{=}0$ schließlich führt zum *expliziten* Verfahren: da in diesem Fall die Matrix diagonal wird, kann man die $u_{0,\ldots N}^{n+1}$ explizit durch die $u_{0,\ldots N}^n$ ausdrücken, ohne überhaupt ein Gleichungssystem zu lösen.

Es scheint sehr verlockend, das übersichtliche explizite Verfahren zur numerischen Lösung des Systems (4.36) einzusetzen, was insbesondere auch angesichts der Nichtlinearitäten bei vergleichbaren Systemen oft gemacht wird. Indes haben explizite Verfahren für partielle Differentialgleichungen vom parabolischen Typ einen manchmal

schwerwiegenden Nachteil: Sie sind nur stabil, wenn der Zeitschritt δt der Courant-Bedingung

$$\delta t < \frac{\delta z^2}{2\kappa\lambda} \tag{5.15}$$

genügt (vgl. Richtmyer und Morton, 1967). Diese notwendige Stabilitätsbedingung gilt zunächst für konstante κ, λ und äquidistantes räumliches Gitter. In den Rechnungen zur Marsatmosphäre wird ein stark nicht-äquidistantes Gitter verwendet werden, auf dem das numerische Stabilitätsverhalten durch den turbulenten Diffusionskoeffizienten K bestimmt wird. In diesem Fall lautet die Courant-Bedingung

$$\delta t < \min_i \frac{\delta z_i^2}{2K(z_i,t)} \ . \tag{5.16}$$

Die numerische Mathematik lehrt, daß die Stabilitätsbedingung (5.16) für alle impliziten Verfahren (5.14) mit $\mu<1/2$ gilt, während die Verfahren mit $\mu\geq 1/2$ zumindest im linearen Fall für jeden beliebigen Zeitschritt stabil sind.

Die *rein numerische* Einschränkung (5.16) ist zunächst völlig unabhängig von physikalischen Anforderungen an die zeitliche Auflösung. In Fällen, wo letztere ohnehin einen Zeitschritt δt unterhalb der Courantschen Grenze erfordert, wird man sich für das explizite Verfahren entscheiden. Im gegebenen Fall allerdings sind in Oberflächennähe recht kleine räumliche Skalen aufzulösen, $\delta z \approx 10\,\mathrm{m}$, wobei gerade dort auch $K \approx 10^3\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$ sehr groß wird. Die Courantbedingung ergäbe dann einen Zeitschritt von $\delta t \approx 0.1\,\mathrm{s}$, was mit den physikalische Zeitskalen von einigen $10\,\mathrm{min}$ nicht in Einklang zu bringen ist. Aus diesem Grund wurde in den numerischen Rechnungen das implizite Verfahren mit $\mu \geq 1/2$ benutzt, das die Verwendung eines wesentlich gröberen zeitlichen Rasters erlaubt.

Der Ehrlichkeit halber sei angemerkt, daß der mit dem impliziten Verfahren mögliche Zeitschritt in meinen Rechnungen meist unter einer Minute liegt, also immer noch numerisch und nicht physikalisch bedingt ist. Dennoch ergibt sich damit ein ≈ 500 mal größeres δt, was das Inkaufnehmen einiger anderer Unannehmlichkeiten (siehe Abschnitt 5.5.1) durchaus rechtfertigt.

5.2 Die Diskretisierung der K-ε-Gleichungen in der Atmosphäre

Nun formulieren wir in Analogie zu den Ausführungen in Abschnitt 5.1 das Finite-Differenzen-Verfahren für die K-ε-Gleichungen. Die Struktur der Gleichungen (4.36) — in denen die erste Ableitung von K (und damit von E und ε) in den Gleichungen für u, v und θ steht, während umgekehrt die ersten Ableitungen von Windgeschwindigkeit und Potentialtemperatur in den Gleichungen für E und ε auftauchen — legt es nahe, ein versetztes Gitter («*staggered mesh*») zu verwenden. Das bedeutet, daß u, v und θ (und die daraus abgeleiteten Größen wie die Temperatur T, der Druck p und die Dichte ϱ) auf dem *Hauptgitter* mit den Indizes $0, 1, 2, \ldots, N$ definiert sind, die turbulenten Größen E und ε aber (sowie der Strahlungsfluß F und der turbulente Diffusionskoeffizient $K_u{=}K_\vartheta$) auf dem gegen das Hauptgitter versetzten *Nebengitter* mit den Indizes $1/2$, $3/2$, $5/2$, …, $N + 1/2$. Aus eher technischen Gründen fällt dabei das Niveau mit dem Index 0 nicht mit der Oberfläche zusammen, sondern liegt auf einer Höhe $z_0 > 0$. Die Anbindung des Niveaus $z = z_0$ an die Oberfläche $z{=}0$ wird ausführlich in Abschnitt 5.4 diskutiert.

Im oberen Teil von Abbildung 5.1 ist das versetzte Gitter für die meteorologischen Observablen u, v, θ und die turbulenten Variablen E, ε skizziert. Ebenfalls angedeutet ist dort, daß die Abstände zwischen den einzelnen Niveaus nach oben hin zunehmen, wir also ein nicht-äquidistantes Gitter eingeführt haben. Der Grund dafür ist einfach: Die Skalen, auf denen sich die prognostischen Variablen verändern, sind in Bodennähe wesentlich kleiner als weit über dem Boden, wie zum Beispiel Abbildungen 7.10 und 7.12 deutlich machen. Will man nicht in der ganzen modellierten Atmosphärenschicht mit sehr kleiner vertikaler Gitterweite arbeiten — was zu einer großen Zahl von Niveaus führen und somit den numerischen Aufwand stark erhöhen würde — so bleibt einem vernünftigerweise nur der Übergang zum nicht-äquidistanten Gitter.

Es gibt grundsätzlich zwei Möglichkeiten, Finite-Differenzen-Schemata auf nicht-äquidistanten Gittern einzuführen. Die aufwendi-

gere bestünde darin, zur Berechnung der ersten Ableitung der Funktion $u(z)$ diese jeweils durch drei Punkte zu interpolieren und die Ableitung der interpolierenden Parabel zu berechnen, die sich dann letztlich auf gewichtete Differenzenquotienten zurückführen läßt, wobei die Gewichte allerdings von Gitterpunkt zu Gitterpunkt variieren. Entsprechend müßte man für die zweite Ableitung vier Punkte berücksichtigen (zumindest wenn das Schema räumlich von zweiter Ordnung sein soll) und erhielte äußerst unübersichtliche Ausdrücke. Der Vorteil dieses Verfahrens gegenüber der gleich zu besprechenden zweiten Variante besteht darin, daß man die einzelnen Gitterpunkte relativ frei wählen kann; man könnte insbesondere ein enges Gitter in Bodennähe an einer Nahtstelle in ein vielfach gröberes Gitter übergehen lassen.

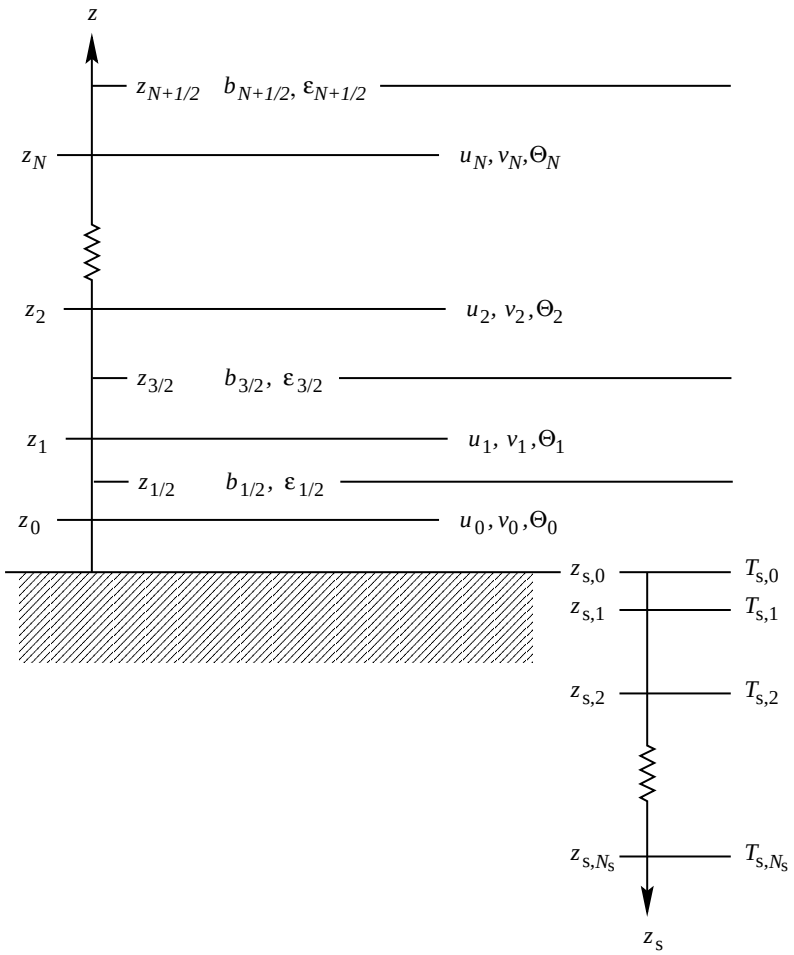

Abbildung 5.1: Das numerische Gitter

Beim zweiten Verfahren führt man das nichtäquidistante Gitter $\{z_i\}$ als Abbildung $\zeta_i \mapsto z_i$ eines äquidistanten Gitters $\{\zeta_i\}$ ein, wobei entscheidend ist, daß die Funktion

$$z : \zeta \mapsto z(\zeta) \quad (5.17)$$

monoton und hinreichend *glatt* ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man auf dem Hauptgitter $\zeta_i = i$ wählen, also $\delta\zeta = 1$, und entsprechend auf dem Nebengitter $\zeta_{i+\frac{1}{2}} = i+\frac{1}{2}$. Die Variablensubstitution (5.17) und Einführen der Ablei-

tung $z' := dz/d\zeta$ der Funktion $z(\zeta)$ führen die Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial u}{\partial z}\right) + q \tag{5.18}$$

[vgl. etwa (4.36a)] in die Form

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \underbrace{\frac{1}{z'}}_{\kappa}\frac{\partial}{\partial \zeta}\Big(\underbrace{\frac{K}{z'}}_{\lambda}\frac{\partial u}{\partial \zeta}\Big) + q \tag{5.19}$$

über, die nun numerisch auf dem äquidistanten Gitter $\{\zeta_i\}$ zu lösen ist. Wenn wir die Koeffizienten $\kappa := 1/z'$ und $\lambda := K/z'$ einführen, erhalten wir auf diese Weise gerade die allgemeine Diffusionsgleichung (5.1) wieder, können also auf die Ergebnisse aus Abschnitt 5.1 zurückgreifen. Wir erhalten damit für $u^{n+1}_{0,\dots N}$ das Tridiagonalsystem

$$\begin{aligned} -\alpha_{k-\frac{1}{2}}u^{n+1}_{k-1} \;+\; \Big(1+\alpha_{k-\frac{1}{2}}+\beta_{k+\frac{1}{2}}\Big)u^{n+1}_{k} \;-\; \beta_{k+\frac{1}{2}}u^{n+1}_{k+1} \;=\; & \\ \alpha_{k-\frac{1}{2}}u^{n}_{k-1} \;+\; \Big(1-\alpha_{k-\frac{1}{2}}-\beta_{k+\frac{1}{2}}\Big)u^{n}_{k} \;+\; \beta_{k+\frac{1}{2}}u^{n}_{k+1} & \\ + \,\delta t q^{n+\frac{1}{2}}_{k}\;, & \end{aligned} \tag{5.20}$$

wobei

$$\alpha_{k-\frac{1}{2}} \;:=\; \frac{\delta t}{2\,\delta\zeta^2}\kappa^{n+\frac{1}{2}}_{k}\lambda^{n+\frac{1}{2}}_{k-\frac{1}{2}} = \delta t\frac{K^{n+\frac{1}{2}}_{u,k-\frac{1}{2}}}{2\,z'_k z'_{k-\frac{1}{2}}} \tag{5.21}$$

$$\beta_{k+\frac{1}{2}} \;:=\; \frac{\delta t}{2\,\delta\zeta^2}\kappa^{n+\frac{1}{2}}_{k}\lambda^{n+\frac{1}{2}}_{k+\frac{1}{2}} = \delta t\frac{K^{n+\frac{1}{2}}_{u,k+\frac{1}{2}}}{2\,z'_k z'_{k+\frac{1}{2}}}\;. \tag{5.22}$$

eingeführt wurde.

5.3 Diskretisierung im Boden

Auch der Marsboden ist an der Wärmebilanz der Atmosphäre beteiligt. Zunächst natürlich als Absorber, der den größeren Teil der in Form von Sonnenlicht einfallenden Energie in Wärme umwandelt und damit der Atmosphäre erst zugänglich macht. Daneben kommt ihm aber auch die

Rolle eines Wärmepuffers zu, der etwa in den Morgenstunden einen Teil der Wärme von der Oberfläche aufnimmt und diese zum Abend hin und in der frühen Nacht wieder abgibt.

Der Wärmeleitungsprozeß wird dabei (unter der Annahme, daß es keine Wärmequellen oder -senken im Boden gibt) durch die Gleichung

$$c_{\mathrm{soil}}\varrho_{\mathrm{soil}}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial d}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial d}\right) \tag{5.23}$$

beschrieben. Hierbei bezeichnet d die Tiefe unter der Oberfläche, λ die Wärmeleitfähigkeit und $c_{\mathrm{soil}}\varrho_{\mathrm{soil}}$ die Wärmekapazität pro Volumen. Der Einfachheit halber (und mangels konkreter Meßdaten) wird λ als zeitlich und räumlich konstant angenommen und zwar bis in große Tiefen, so daß das Wärmeleitungsproblem im Boden sich als

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \eta\frac{\partial^2 T}{\partial d^2}\ , \qquad 0 < d < \infty \tag{5.24}$$

mit $\eta := \lambda/(c_{\mathrm{soil}}\varrho_{\mathrm{soil}})$ darstellt. Die Randbedingung bei $d = 0$ folgt aus der Beziehung

$$\lambda\frac{\partial T}{\partial d} = F_{\mathrm{soil}} \tag{5.25}$$

zusammen mit der Angabe des Wärmeflusses F_{soil} durch die Oberfläche, sei es explizit, sei es über eine Relation, die F_{soil} an die Oberflächentemperatur $T(0,t)$ koppelt.

Das Wärmeleitungsproblem (5.23), (5.25) auf dem halbunendlichen Intervall $0<d<\infty$ läßt sich durch Einführen der skalierten Variablen $\tilde{d} := d/\lambda$ auf die Form

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{I^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \tilde{d}^2}\ , \qquad \frac{\partial T}{\partial \tilde{d}} = F_{\mathrm{soil}} \tag{5.26}$$

bringen, wobei

$$I := \sqrt{c_{\mathrm{soil}}\varrho_{\mathrm{soil}}\lambda} \tag{5.27}$$

die sogenannte *Thermische Trägheit* ist. Die Darstellung (5.26) zeigt, daß es für die Wärmepufferung des Bodens — also letztlich den Zusammenhang zwischen F_{soil} und $T(0,t)$ — nicht auf die Werte von $c_{\mathrm{soil}}\varrho_{\mathrm{soil}}$ und λ einzeln ankommt, sondern lediglich auf das Produkt

$I^2 = c_{\mathrm{soil}}\varrho_{\mathrm{soil}}\lambda$ dieser Materialgrößen[1]. Erst wenn man sich außer für die thermische Antwort der Oberfläche auch noch für den vertikalen Temperaturverlauf im Boden interessiert, muß man neben der Thermischen Trägheit I auch noch die Wärmeleitfähigkeit λ festlegen. Da umgekehrt nur die thermische Antwort leicht aus Beobachtungen abgeleitet werden kann, ist meist auch nur I für einen gegebenen Ort auf dem Mars bekannt (es existieren in der Tat Karten von I für die gesamte Marsoberfläche, die aus Satellitenbeobachtungen abgeleitet sind), während $c_{\mathrm{soil}}\varrho_{\mathrm{soil}}$ und damit λ aus Analogie zu irdischen Böden geschätzt wird.

Die anderslautenden Befunde im Modell von Savijärvi (1991), wonach Änderungen von λ bei festgehaltener Thermischer Trägheit auch auf andere Oberflächentemperaturen führen, müssen numerischer Natur sein und hängen wahrscheinlich mit der sehr geringen Zahl der Gitterpunkte in seinem Wärmeleitungsmodell zusammen.

An der Wärmeleitungsgleichung (5.24) läßt sich ablesen, daß die typische Eindringtiefe einer thermischen Welle der Winkelfrequenz Ω durch $l \sim \sqrt{2\eta/\omega}$ gegeben ist. Die typischen Zeitskalen der atmosphärischen Turbulenz und der Sonneneinstrahlung liegen zwischen einer Viertelstunde (vgl. etwa Abbildung 7.4) und einem Tag. Die entsprechenden Eindringtiefen variieren um mehr als eine Größenordnung. Da man eine Tiefe von einigen $l_{\max}$ erfassen sollte um den Tagesgang der Temperatur richtig zu behandeln, andererseits aber in Oberflächennähe eine Auflösung von Bruchteilen von $l_{\min}$ nötig ist, um die Reaktion auf die schnellen Änderungen richtig zu erfassen, liegt wie bei der Diskretisierung der atmosphärischen Prozesse eine

[1] Dieser Umstand spiegelt sich auch in den Formeln für den Zusammenhang zwischen F_{soil} und $T(0,t)$ wieder, der sich in der Form

$$T(0,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,I} \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{F_{\mathrm{soil}}(t')}{\sqrt{t-t'}}\,dt' \tag{5.28}$$

bzw.

$$F_{\mathrm{soil}}(t) = -\frac{I}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{\dot{T}(0,t')}{\sqrt{t-t'}}\,dt' \tag{5.29}$$

schreiben läßt. Die Gleichungen (5.28), (5.29) stellen einen Teil der analytischen Lösung des Wärmeleitungsproblems dar, sind aber zur numerischen Anwendung wenig geeignet.

Situation vor, in der es sich anbietet, ein nicht-äquidistantes Gitter zu verwenden, in dem der Abstand zwischen den Niveaus von kleinen Werten in Oberflächennähe zu viel größeren Werten in der Tiefe anwächst. Für die den meisten Rechnungen in dieser Arbeit zugrundegelegten Werte $I = 215\,\mathrm{J/(m^2K\sqrt{s})}$, $\lambda = 0.043\,\mathrm{W\,m/s}$ ist im verwendeten Gitter $\delta z \approx 0.6\,\mathrm{mm}$ an der Oberfläche, wohingegen $\delta z \approx 1.5\,\mathrm{cm}$ in der maximalen Tiefe von $\approx 8.3\,\mathrm{cm}$. Auch dieses nicht-äquidistante Gitter ist in Abbildung 5.1 angedeutet.

Da das numerische Gitter nur eine endliche Tiefe erreicht, muß auch am unteren Rand eine Randbedingung vorgegeben werden, obwohl im mathematische Modell das wärmeleitende Medium eine unendliche Tiefe hat. Diese Randbedingung ist bedeutungslos, wenn das unterste Niveau $d_{N_{\mathrm{soil}}}$ nur tief genug liegt und wurde der Einfachheit halber als isolierend gewählt ($T_{N_{\mathrm{soil}}} = T_{N_{\mathrm{soil}}-1}$).

Stellen wir nun die Wärmeleitung im Boden wieder in den Rahmen der atmosphärischen Wärmebilanz, so können wir F_{soil} durch die bereits früher eingeführten Wärmeflüsse H und F_0 ausdrücken:

$$F_{\mathrm{soil}} = H + F_0 \ . \tag{5.30}$$

Dabei ist H der konvektive Wärmefluß in der Atmosphäre in Oberflächennähe, während F_0 für den gesamten Strahlungsfluß an der Oberfläche steht, also die Summe aus optischem Nettofluß F_{opt}, Infrarot-Strahlungsfluß im $15\,\mu$-Band $F_{15\,\mu}$ und der von der Oberfläche emittierten Wärmestrahlung σT_{s}^4; hierbei wird eine Infrarot-Emissivität der Oberfläche von 100 % angenommen, die der Realität durchaus nahe kommt.

Nun führen wir ganz analog zu Abschnitt 5.2 mit Hilfe der Variablensubstitution $d = d(\zeta)$ das nicht-äquidistante Gitter $\{d_i\}$ auf ein äquidistantes Einheitsgitter $\{\zeta_i = i\}$ zurück. Dann nehmen (5.24), (5.25) die Form

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{d'} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\eta}{d'} \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) \tag{5.31}$$

mit der Randbedingung

$$\left. \frac{\partial T}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0} = \frac{d_0'}{\lambda} (H + F_0) \tag{5.32}$$

an.

Das Gleichungssystem für das Crank-Nicholson-Schema hat die Form

$$-\alpha_{k-\frac{1}{2}} T_{k-1}^{n+1} + \left(1+\alpha_{k-\frac{1}{2}}+\beta_{k+\frac{1}{2}}\right) T_k^{n+1} - \beta_{k+\frac{1}{2}} T_{k+1}^{n+1} = \alpha_{k-\frac{1}{2}} T_{k-1}^{n} + \left(1-\alpha_{k-\frac{1}{2}}-\beta_{k+\frac{1}{2}}\right) T_k^{n} + \beta_{k+\frac{1}{2}} T_{k+1}^{n} \quad (5.33)$$

für $k = 1, 2, \ldots$, wobei

$$\alpha_{k-\frac{1}{2}} := \frac{\delta t}{2\,\delta\zeta^2} \frac{\eta}{{d'}_k^{n+\frac{1}{2}} {d'}_{k-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}\,, \qquad \beta_{k+\frac{1}{2}} := \frac{\delta t}{2\,\delta\zeta^2} \frac{\eta}{{d'}_k^{n+\frac{1}{2}} {d'}_{k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}\,. \quad (5.34)$$

Die obere Randbedingung formulieren wir mit folgendem Trick, den beispielsweise Hoffman (1992) diskutiert. Die Bedingung (5.32) lautet diskretisiert

$$\frac{T_1 - T_{-1}}{2 d'_0\,\delta\zeta} = \frac{H + F_0}{\lambda}\,. \quad (5.35)$$

Dabei tritt der fiktive Wert T_{-1} auf, den man aus (5.35) und der Gleichung (5.33) für $k{=}0$ wieder eliminieren kann. Das führt auf

$$\begin{aligned}(1+\alpha_{-\frac{1}{2}}+\beta_{\frac{1}{2}})T_0^{n+1} - (\alpha_{-\frac{1}{2}}+\beta_{\frac{1}{2}})T_1^{n+1} &= \\ (1-\alpha_{-\frac{1}{2}}-\beta_{\frac{1}{2}})T_0^{n} + (\alpha_{-\frac{1}{2}}+\beta_{\frac{1}{2}})T_1^{n} & \\ -2d'_0\delta\zeta\;\alpha_{-\frac{1}{2}}\frac{(H^n+F_0^n)+(H^{n+1}+F_0^{n+1})}{\lambda}\,. &\end{aligned} \quad (5.36)$$

(5.33) und (5.36) stellen zusammen ein (tridiagonales) Gleichungssystem dar, aus dem man — allerdings nur bei bekanntem Wärmefluß $H^n{+}F_0^n$, $H^{n+1}{+}F_0^{n+1}$ — die Temperaturwerte $T_{0,\ldots,N_{\mathrm{soil}}}^{n+1}$ bestimmen kann.

5.4 Die Randbedingungen für die Atmosphäre

5.4.1 Die untere Randbedingung

Von entscheidender Bedeutung für die Dynamik der Planetaren Grenzschicht ist die Kopplung derselben an die Oberfläche. Letztlich ist sie es

ja, die zu Abweichungen von geostrophischen Verhältnissen und damit zur Ausbildung der Grenzschicht führt, in der sich die in größerer Höhe freie Atmosphäre an die Einschränkungen anpaßt, welche die Oberfläche den prognostischen Variablen aufzwingt. Dabei ist es äußerst wichtig, gerade die unterste Schicht der Grenzschicht realistisch zu beschreiben, da sie die Flüsse von Impuls und Wärme bestimmt, von denen wiederum die Dynamik auch in größeren Höhen der Grenzschicht entscheidend abhängt. Es hat sich in vielen Bereichen bewährt, die untersten zig Meter der Atmosphäre mit der Monin-Obuchovschen Ähnlichkeitstheorie (vgl. Abschnitt 4.3) zu beschreiben. Diese stützt sich einerseits auf hinreichend allgemeine Argumente, um sich auch auf der Messung nicht direkt zugängliche Konfigurationen wie die Oberflächenschicht der Marsatmosphäre anwenden zu lassen, und hat andererseits durch die gemessenen Profile $\phi(\zeta)$ genügend Bezug zu realen Strömungen, um nicht in den Verdacht der reinen, jeglichen Praxisbezugs entbehrenden Theorie zu kommen.

Randbedingung für u, v, θ

Es hat sich gezeigt (siehe etwa Pielke, 1984; Duynkerke und Driedonks, 1987; Perov und Glazunov, 1991), daß es numerisch von Vorteil ist, die Monin-Obuchov-Relationen (4.25), (4.26) nicht direkt als *von Neumannsche Randbedingungen*, also solche für die Gradienten $\partial u/\partial z$, $\partial\theta/\partial z$ zu verwenden, sondern sie erst zu integrieren und dann als *Dirichletsche Randbedingungen* einzuführen. Die Integration führt hier auf die bereits früher eingeführten Funktionen χ_m, χ_h [vgl. Formeln (4.30), (4.31)],

$$\chi_{\mathrm{m/h}}(\zeta,\eta_0) := \frac{1}{\kappa}\int_{\eta_0}^{\zeta} \frac{\phi_{\mathrm{m/h}}(\zeta')}{\zeta'}\,d\zeta' \;, \tag{5.37}$$

und liefert konkret

$$u_0 = \frac{u_1}{U_1} u_* \chi_{\mathrm{m}}(\zeta_0,\eta_0) \tag{5.38}$$

$$v_0 = \frac{v_1}{U_1} u_* \chi_{\mathrm{m}}(\zeta_0,\eta_0) \tag{5.39}$$

$$\theta_0 = T_{\mathrm{s}} - \frac{h_{\mathrm{s}}}{u_*}\chi_{\mathrm{h}}(\zeta_0,\eta_0) \tag{5.40}$$

mit $\zeta := z/L$, $\eta_0 := h_0/L$, $h_\mathrm{s} := H/c_p\varrho$, $U := |\mathbf{u}|$, wobei H wieder den konvektiven Wärmestrom in der untersten Atmosphärenschicht bezeichnet und u_* die Reibungsgeschwindigkeit (vgl. Abschnitt 4.3). Hier und im folgenden steht der Index ‹s› für den Wert der betreffenden Variablen an der Planetenoberfläche. In (5.38)–(5.40) wurde von der sogenannten *Rauhigkeitslänge* h_0 bis z_0 integriert, wobei bei $z = h_0$ die Oberflächenwerte $u(h_0) = v(h_0) = 0$, $\theta(h_0) = T_\mathrm{s}$ eingesetzt wurden. Die Länge h_0 bewegt sich typischerweise im Bereich von Millimetern bis wenigen Metern und hat für die *Viking*-Landestellen etwa den Wert $h_0 \approx 1$–$2\,\mathrm{cm}$ (Golitsyn und Demchenko, 1979). Außerdem wurde die realistische Annahme gemacht, daß die Windrichtung $\arctan(v/u)$ in der Oberflächenschicht von z unabhängig ist.

Um (5.38)–(5.40) anwenden zu können, benötigen wir die Flüsse von Impuls und Wärme. Diese beschafft man sich mit der Annahme, daß sie nicht nur in der Oberflächenschicht $0<z<z_0$, sondern im ganzen Bereich $0<z<z_1$ konstant sind, was letztlich nur erfordert, z_0 und z_1 hinreichend klein zu wählen. Dann können wir den Impulsfluß (die Scherspannung) τ und den skalierten Wärmefluß $h_{\frac12}$ in der Höhe $z_{\frac12}$ durch Finite Differenzen annähern,

$$u_*^2 = \frac{|\tau|}{\varrho} = k_{u,\frac12}|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0| = k_{u,\frac12}(U_1 - U_0) \tag{5.41}$$

$$h_{\frac12} = -k_{\theta,\frac12}(\theta_1 - \theta_0)\ , \tag{5.42}$$

wobei

$$k_{u/\theta} := \frac{K_{u/\theta,\frac12}}{z'_{\frac12}}\ . \tag{5.43}$$

Dabei ist im allgemeinen $h_{\frac12} \neq h_\mathrm{s}$, denn auch wenn $H = hc_p\varrho$ konstant ist, gilt dies nicht für h, sondern vielmehr

$$h_{\frac12} = \frac{H}{c_p(T_{\frac12})\varrho_{\frac12}} = h_\mathrm{s}\cdot\frac{c_p(T_\mathrm{s})T_{\frac12}}{c_p(T_{\frac12})T_\mathrm{s}} =: h_\mathrm{s}\cdot\gamma\ . \tag{5.44}$$

Nun haben wir per definitionem

$$\boxed{L = -\frac{u_*^3 T_\mathrm{s}}{\kappa g h_\mathrm{s}}}\ ; \tag{5.45}$$

aus (5.38), (5.39), (5.41) lassen sich u_0, v_0 eliminieren zu

$$\frac{U_1}{\chi_{\mathrm{m}}}\frac{1}{u_*^2} - \frac{1}{u_*} - \frac{1}{k_{u,\frac{1}{2}}\chi_{\mathrm{m}}} = 0 \,, \tag{5.46}$$

einer quadratischen Gleichung, deren physikalisch sinnvolle Lösung in numerisch stabiler Darstellung

$$\boxed{u_* = \frac{2U_1}{\chi_{\mathrm{m}}}\frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{4U_1}{k_{u,\frac{1}{2}}\chi_{\mathrm{m}}^2}} + 1}} \,, \tag{5.47}$$

lautet, und aus (5.40), (5.42) können wir θ_0 eliminieren zu

$$\boxed{h_{\mathrm{s}} = -\frac{\theta_1 - T_{\mathrm{s}}}{\dfrac{1}{\gamma k_{\theta,\frac{1}{2}}} + \dfrac{\chi_{\mathrm{h}}}{u_*}}} \,. \tag{5.48}$$

Wenn u_1, v_1, θ_1, sowie $k_{\frac{1}{2}}$ und T_{s} vorgegeben sind, kann man aus dem nichtlinearen Gleichungssystem (5.45), (5.47), (5.48) die drei Parameter u_*, h_{s}, L der Oberflächenschicht bestimmen[2] und in (5.38)–(5.40) einsetzen, um u_0, v_0, θ_0 zu bestimmen. Das ist genau der Grad an Information, den wir als untere Randbedingung für die drei meteorologischen Variablen u, v, θ benötigen.

Randbedingung für E und ε

Für die unteren Randbedingungen, die an die turbulenten Größen E und ε zu stellen sind, gibt es in der Literatur verschiedene Vorschläge, die in Tabelle 5.1 aufgelistet sind und aus Arbeiten entnommen sind, die nicht alle K-ε-Modelle zum Thema haben.

[2] Das geschieht in praxi durch direkte Iteration der Gleichungen. Man könnte effektivere Methoden wie das Newton-Raphson-Verfahren verwenden, da aber dieser Teil der Gesamtiteration recht rasch konvergiert und die später zu besprechenden Schwierigkeiten nicht vom System (5.45), (5.47), (5.48) herrühren, lohnt sich der zusätzliche Aufwand kaum.

Quelle	$E(z_0)$	$\varepsilon(z_0)$	*Schichtung*
Wyngaard und Coté (1974)	$3.75u_*^2 + 0.2w_*^2$	$u_*^3/\kappa z_0 \left(\phi_\mathrm{m} - z_0/L\right)$	i
Wyngaard (1975)	$3.75u_*^2$	$-\overline{u_i u_j}\,\partial\overline{u_i}/\partial x_j + g_i/T \cdot \overline{\theta' u_i'}$	n + s
André et al. (1976)	$0.9u_f^2 + 0.4w_*^2$	—	i
Detering und Etling (1985)	u_*^2/c_0^2, c_0=0.40	$u_*^3/\kappa z_0$	n
Detering (1985)	u_*^2/c_M^2, $1/c_M^2 = 4.0$	$u_*^3/\kappa z_0\,(\phi_\mathrm{m} - z_0/L)$	
Duynkerke und Driedonks (1987)	$u_*^2/\sqrt{c_\mu} + 0.35w_*^2$	$u_*^3/\kappa z_0\,(\phi_\mathrm{m} - z_0/L)$	i
Duynkerke (1988)	$5.50\,u_*^2$	—	
Huang und Raman (1989)	$S = u_*^3/\kappa z \cdot \phi_\mathrm{m}(\zeta)$, $B = g/\theta_0 \cdot (-u_*\theta_*)$		s + i
Huang und Raman (1991)	$5.5u_*^2 + 0.5w_*^2$	$u_*^3/\kappa z_0\,(\phi_\mathrm{m} - z_0/L)$	s + i

Tabelle 5.1: Verschiedene Varianten der unteren Randbedingung für E und ε. Rechts ist die thermische Schichtung angedeutet, für die das jeweilige Modell anwendbar ist: **i**nstabil, **n**eutral oder **s**tabil

Dabei bezeichnet $w_* := \sqrt[3]{g\,\overline{w'\theta'}\,h_\mathrm{PBL}/T_\mathrm{s}}$ die sogenannte *konvektive Geschwindigkeitsskala* (Deardorff, 1970) und ist ein Maß für die vertikalen Geschwindigkeitsfluktuationen einer turbulenten Planetaren Grenzschicht der Höhe h_PBL in Bodennähe. $u_f := \sqrt[3]{g\,\overline{w'\theta'}\,z_0/T_\mathrm{s}}$ ist eine ähnlich gebildete Geschwindigkeitsskala, deren physikalischer Gehalt etwas unklar ist.

Die Bedingung von Huang und Raman (1989) ist insofern bemerkenswert, als nicht die Werte von E_0 und ε_0 angegeben werden, sondern vielmehr die Quellterme S und B aus den Gleichungen (4.36d),

(4.36e) in der untersten Schicht. Diese Formulierung verspricht zwar, eine robustere Bedingung zu liefern als die anderen, hat aber das konzeptuelle Problem, daß sie die K-ε-Gleichungen für E und ε auch in der Oberflächenschicht anwendet, während für die anderen Variablen angenommen wird, daß hier das K-ε-Modell durch die letztlich dazu inkompatible Monin-Obuchov-Theorie abgelöst wird.

In meiner Arbeit habe ich es vorgezogen, die Gültigkeitsbereiche der beiden Turbulenzmodelle klarer gegeneinander abzugrenzen und habe die Randbedingung von Duynkerke und Driedonks (1987)

$$E_0 = \frac{u_*^2}{\sqrt{c_\mu}} + 0.35 w_*^2 \tag{5.49}$$

$$\varepsilon_0 = \left\{ u_*^3 \left(\frac{\phi_{\mathrm{m}}}{\kappa z} - \frac{1}{\kappa L} \right) \right\}_{z_0} \tag{5.50}$$

benutzt. In (5.49) stellt u_*^2 einen charakteristischen Wert für das Quadrat der horizontalen, w_*^2 für das der vertikalen Geschwindigkeitsfluktuationen dar

$$\frac{u_*^2}{\sqrt{c_\mu}} \simeq \frac{\overline{u'^2 + v'^2}}{2}, \qquad 0.35 w_*^2 \simeq \frac{\overline{w'^2}}{2}\ , \tag{5.51}$$

während die Gleichung (5.50) auf der vernünftigen Annahme beruht, daß in Oberflächennähe die Bilanz der turbulenten kinetischen Energie im wesentlichen durch die Produktionsterme $S = K_u \left[(\partial u/\partial z)^2 + (\partial v/\partial z)^2 \right]$, $B = -g/\theta \cdot K_\theta \, \partial\theta/\partial z$ und den Dissipationsterm ε bestimmt ist. Dies wird dadurch gerechtfertigt, daß $S+B$ dort viel größer ist als $\partial_t E$ oder der Diffusionsterm $\partial_z (K_E \partial_z E)$, womit (4.36d) sich auf die Beziehung

$$0 = S + B - \varepsilon \tag{5.52}$$

reduziert, die sich leicht auf die Form (5.50) umschreiben läßt.

Ebenfalls aus dem Motiv, nur eine einzige Nahtstelle zwischen Monin-Obuchov- und K-ε-Theorie zu haben, habe ich die Randbedingungen, wie in (5.49) und (5.50) angegeben, auf den Punkt $z = z_0$ bezogen und diese Werte anschließend auf $z = z_{\frac{1}{2}}$ (wo man im numerischen Verfahren die Randbedingungen angeben muß) interpoliert.

5.4.2 Die obere Randbedingung

Die Randbedingung in der Höhe $z = z_N$ beziehungsweise $z = z_{N+\frac{1}{2}}$ wurde in der Windgeschwindigkeit als geostrophisch und in Temperatur, turbulenter kinetischer Energie und Dissipationsrate als isolierend gewählt:

$$u_N = u_{\text{geo}} \ , \qquad v_N = v_{\text{geo}} \ , \qquad T_N = T_{N-1} \tag{5.53}$$

und

$$E_{N+\frac{1}{2}} = E_{N-\frac{1}{2}} \ , \qquad \varepsilon_{N+\frac{1}{2}} = \varepsilon_{N-\frac{1}{2}} \ . \tag{5.54}$$

Ähnlich wie im Fall der unteren Randbedingung im Boden sollten die Ergebnisse dieser oberen Randbedingung gegenüber unempfindlich sein (solange sie nicht neue, unphysikalische Effekte ins Spiel bringt), und dies hat sich bei Experimenten mit abgeänderten oberen Randbedingungen auch bestätigt.

5.5 Das Iterationsverfahren

Das Modell für die Dynamik der Planetaren Grenzschicht setzt sich zusammen aus den K-ε-Gleichungen (4.36) für die höhere Atmosphäre, den Gleichungen (5.45), (5.47), (5.48) und (5.38)–(5.40) für die Oberflächenschicht, sowie dem Wärmeleitungsproblem (5.24), (5.25) für den Marsboden. Dieses gesamte Modell ist hochgradig nichtlinear, was die numerische Behandlung erheblich erschwert. Die einzelnen Nichtlinearitäten ergeben sich dabei

1. aus der Abhängigkeit der Produktionsterme S und B von u, v und θ ,
2. durch die Abhängigkeit der Diffusionskoeffizienten $K_u{=}K_\theta$, K_E, K_ε von E und ε in der Form $K \sim E^2/\varepsilon$,
3. durch den Produktionsterm $c_1 \dfrac{\varepsilon}{E}(S{+}B_+)$ und den Zerfallsterm $-c_2 \dfrac{\varepsilon^2}{E}$ in (4.36e),
4. durch das nichtlineare Gleichungssystem (5.45), (5.47), (5.48) für L, u_* und H in der Oberflächenschicht,

sowie

5. durch die Randbedingung (5.25) für das Wärmeleitungsproblem im Boden, wobei F_{soil} stark nichtlinear von T abhängt — man denke an den Term σT_{s}^4.

Die gewichtigste dieser Nichtlinearität dürfte dabei Nummer 2 sein, da E und ε (und damit letztlich auch K) über viele Größenordnungen variieren und K in den beiden Gleichungen (4.36d), (4.36e) für E und ε, wie auch in den restlichen Gleichungen des Systems (4.36) eine zentrale Rolle spielt.

Nur wenn sämtliche Nichtlinearitäten entfallen würden, erhielte man beim Diskretisieren für ein implizites Verfahren ein lineares Gleichungssystem, das dann zwar dünn besetzt, wegen der Kopplung der einzelnen Variablen untereinander aber nicht mehr tridiagonal wäre, sondern vielmehr eine kompliziertere Bandstruktur aufweisen würde.

Das explizite Verfahren

Umgekehrt ist es oft hilfreich, für nichtlineare Differentialgleichungen ein explizites Verfahren zu wählen (vgl. Seite 68 f.), da man dann einen Zusammenhang zwischen u^{n+1}, …, ε^{n+1} und u^n, …, ε^n erhält, der zwar immer noch nichtlinear, aber bereits nach den unbekannten Größen aufgelöst ist, so daß man sich die Lösung eines sehr komplexen nichtlinearen Gleichungssystems erspart. Dem steht allerdings der äußerst kleine Zeitschritt gegenüber, den die in Abschnitt 5.1 diskutierte Courant-Bedingung für das explizite Verfahren erfordert.

Das Dufort-Frankel-Verfahren

Man könnte versucht sein, auf das *Dufort-Frankel-Verfahren* auszuweichen, ein explizites Verfahren, das auch noch die Größen u^{n-1}, …, ε^{n-1} vom vorherigen Zeitschritt benötigt und wie das Crank-Nicholson-Verfahren von zweiter Ordnung in δt ist. Obwohl es ein explizites Verfahren ist, besitzt das Dufort-Frankel-Verfahren doch numerisch unbedingte Stabilität, das heißt es gibt keine Schranke für δt in der Art der Courant-Bedingung. Diese Kombination von positiven Eigenschaften klingt zu schön, um wahr zu sein, und in der Tat besitzt das Dufort-

Frankel-Verfahren den einen großen Nachteil, daß es die falschen Gleichungen löst (vgl. Richtmyer und Morton, 1967). Angewandt mit dem Zeitschritt δt und der räumlichen Gitterweite δz auf die parabolische Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{5.55}$$

liefert es die angenäherte Lösung der hyperbolischen Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\delta t^2}{\delta z^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) , \tag{5.56}$$

man erhält also zusätzlich zu den Diffusionsvorgängen, an denen man interessiert ist, auch noch Wellenphänomene mit der Phasengeschwindigkeit $c_{\mathrm{ph}} = \delta z / \delta t$, die in expliziten Verfahren gleich der Ausbreitungsgeschwindigkeit für Signale auf dem numerischen Gitter ist. Diese Zusatzeffekte lassen sich nur unterdrücken, indem man δt klein genug wählt, so daß die diffusive Ausbreitung durch den endlichen Wert von c_{ph} praktisch nicht behindert wird. Eine genauere Analyse führt auf die Abschätzung

$$\delta t \lesssim \frac{\delta z^2}{K} \tag{5.57}$$

als Bedingung hierfür — also gerade wieder die Courant-Bedingung.

Implizites Verfahren mit Newton-Raphson

Dergestalt gewinnt man mit dem Dufort-Frankel-Verfahren also nichts dazu und wir müssen den Komplikationen ins Auge schauen, welche die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems aus dem impliziten Verfahren mit sich bringt. Die entsprechenden Gleichungen, deren Form sich von (5.20) ableitet, stellen ein nichtlineares Gleichungssystem in den $5(N+1)+(N_{\mathrm{soil}}+1) \approx 400$ Variablen $u^{n+1}_{0,\ldots,N}, \ldots, \varepsilon^{n+1}_{0,\ldots,N}, T^{n+1}_{0,\ldots,N_{\mathrm{soil}}}$ dar, das man nun mit effektiven numerischen Methoden wie dem Newton-Raphson-Verfahren lösen könnte. Dabei ist aber zu beachten, daß die zugehörige Jacobi-Matrix

$$\mathcal{J} = \left\| \frac{\partial \left(u^{n+1}_{0,\ldots,N}, \ldots, \varepsilon^{n+1}_{0,\ldots,N}, T^{n+1}_{0,\ldots,N_{\mathrm{soil}}} \right)}{\partial \left(u^{n}_{0,\ldots,N}, \ldots, \varepsilon^{n}_{0,\ldots,N}, T^{n}_{0,\ldots,N_{\mathrm{soil}}} \right)} \right\| \tag{5.58}$$

sehr dünn besetzt ist, da beispielsweise u_k ja nur mit den 7 Variablen $u_{k\pm1}$, v_k, $E_{k\pm\frac{1}{2}}$, $\varepsilon_{k\pm\frac{1}{2}}$ verknüpft ist. Um nicht einen Faktor ≈ 50 an Effektivität zu verlieren (indem man statt der 8 realen Abhängigkeiten ca. 400 scheinbare berücksichtigt) müßte man diese Bandstruktur ausnutzen — wofür durchaus bekannte Verfahren zur Verfügung stehen (Press et al., 1992) — und müßte sämtliche nicht verschwindende Ableitungen in $\mathcal{J}$ berechnen. Zusätzlich kompliziert sich dieses Bild noch durch den Strahlungsfluß, der seinerseits ja in einer komplexen Prozedur aus dem Temperaturprofil *integral* bestimmt wird (Abschnitt 3.2).

Das iterierte implizite Verfahren

Mit schlotternden Knien angesichts all dieser Komplikationen und Fallstricke habe ich mich schließlich für ein wesentlich übersichtlicheres, wenn auch vielleicht letzten Endes numerisch nicht optimales Verfahren entschieden, das ich hier *iteriertes implizites Verfahren* nennen möchte, und das in Abbildung 5.2 schematisch dargestellt ist.

Die einfache Grundidee dieser Methode, bei der letzten Endes das nichtlineare Gleichungssystem des impliziten Verfahrens für die Variablen u^{n+1}, …, ε^{n+1} iterativ gelöst wird, besteht darin, die diskretisierten Gleichungen nacheinander für die einzelnen Variablen unter der Annahme zu lösen, alle anderen Variablen hätten einen festen Wert. Man bestimmt also zum Beispiel u^{n+1} aus dem Tridiagonalsystem [vgl. (5.20)]

$$\begin{aligned} -\alpha_{k-\frac{1}{2}} u_{k-1}^{n+1} \;+\; \left(1+\alpha_{k-\frac{1}{2}}+\beta_{k+\frac{1}{2}}\right) u_k^{n+1} \;-\; \beta_{k+\frac{1}{2}} u_{k+1}^{n+1} \;=\; & \\ \alpha_{k-\frac{1}{2}} u_{k-1}^{n} \;+\; \left(1-\alpha_{k-\frac{1}{2}}-\beta_{k+\frac{1}{2}}\right) u_k^{n} \;+\; \beta_{k+\frac{1}{2}} u_{k+1}^{n} & \\ +\; \delta t\, f\cdot(v_k^{n+\frac{1}{2}} - v_{\mathrm{geo}})\;, & \end{aligned} \tag{5.59}$$

für feste Werte von $K_u^{n+\frac{1}{2}}$ und $v^{n+\frac{1}{2}}$. Aus diesen neuen Werten für u^{n+1} (zusammen mit den Werten u^n aus dem letzten Zeitschritt) berechnet man $u^{n+\frac{1}{2}}$, welches dann zusammen mit dem bereits verwendeten Werte $K_u^{n+\frac{1}{2}}$ in die Gleichung

$$-\alpha_{k-\frac{1}{2}} v_{k-1}^{n+1} \;+\; \left(1+\alpha_{k-\frac{1}{2}}+\beta_{k+\frac{1}{2}}\right) v_k^{n+1} \;-\; \beta_{k+\frac{1}{2}} v_{k+1}^{n+1} \;=$$

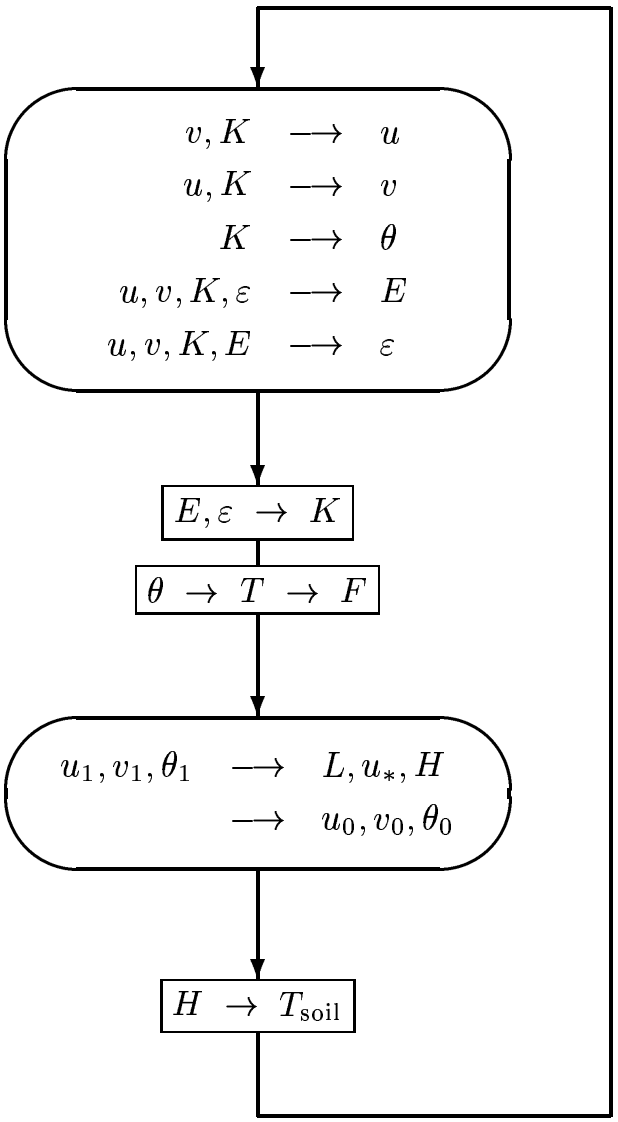

Abbildung 5.2: Schematische Darstellung des Iterationszyklus beim «iterierten impliziten Verfahren». Nur eine Auswahl der Abhängigkeiten ist angegeben

$$\alpha_{k-\frac{1}{2}} v_{k-1}^n \; + \; \left(1-\alpha_{k-\frac{1}{2}}-\beta_{k+\frac{1}{2}}\right) v_k^n \; + \; \beta_{k+\frac{1}{2}} v_{k+1}^n \qquad (5.60)$$
$$- \; \delta t \, f \cdot (u_k^{n+\frac{1}{2}} - u_{\text{geo}}) \; ,$$

für v eingeht. Entsprechend geht man dann mit θ, E und ε vor und kann dann aus den neuen Werten von E^{n+1} und ε^{n+1} den neuen Wert $K_u^{n+\frac{1}{2}}$ berechnen, der beim nächsten Durchgang Verwendung finden wird.

Zunächst ist jetzt aber die untere atmosphärische Randbedingung zu erfüllen. Hierzu benötigen wir die eben ermittelten Werte von u_1, v_1, θ_1, sowie den besten verfügbaren Wert von T_s (im allgemeinen der Wert aus dem letzten Durchgang). Damit können wir aus (5.45), (5.47), (5.48) die Parameter L, u_* und H berechnen (auch das, wie in Abschnitt 5.4.1 erwähnt, iterativ) und daraus dann auch u_0, v_0 und θ_0. Nun können wir die diskretisierte Wärmeleitungsgleichung (5.33) im Boden lösen, wobei der eben ermittelte Wert des konvektiven Wärmeflusses H in die Randbedingung (5.36) einfließt. Bevor der Zyklus sich nun wiederholen kann, müssen noch aus der Potentialtemperatur $\theta(z)$ zunächst die atmosphärische Temperatur $T(z)$, der Druck $p(z)$ und die Dichte $\varrho(z)$ berechnet werden, aus denen man dann, wie in Kapitel 3 ausgeführt, den Strahlungsfluß F bestimmen kann. Nun beginnt ein neuer Durchgang durch das Schema, bei dem sich bessere[3] Werte für $u^{n+1}, \ldots, \varepsilon^{n+1}$ ergeben werden, und so fort. Diese Iteration wird so lange fortgesetzt, bis sich die neuen Werte hinreichend wenig von den jeweils vorausgehenden unterscheiden, was in den Rechnungen, deren Ergebnisse in den Kapiteln 7 und 8 dargestellt sind, etwa 15 Durchläufe erforderte.

5.5.1 Chaos

Wie bei den Ausführungen zum «iterierten impliziten Verfahren» schon angedeutet, hängt seine Anwendbarkeit vor allem von der Konvergenz der Iteration ab. In der Form, wie das Verfahren bisher vorgestellt wurde, ergaben sich in den konkreten Modellrechnungen immer wieder Probleme. Zwar schienen die Iterationsschritte unter Tagesbedingungen im allgemeinen zu konvergieren, doch nachts machten die Variablen oft heftige Sprünge, die häufig sogar zum Programmabbruch führten. Bei näherem Hinsehen zeigte sich, daß auch unter Tagesbedingungen, wenn die stark dissipativen Prozesse numerische Katastrophen weitgehend verhindern, nicht in jedem Zeitschritt wirklich Konvergenz eintrat, was in Abbildung 5.3 zu sehen ist.

Dort ist im oberen Bild ein Ausschnitt aus der zeitlichen Entwicklung der Variablen u_0 über 9 Zeitschritte (entsprechend den neun einzelnen Stufen im Diagramm) aufgetragen. Nach rechts ist dabei die

[3] Vorausgesetzt das Verfahren konvergiert, siehe auch Abschnitt 5.5.1

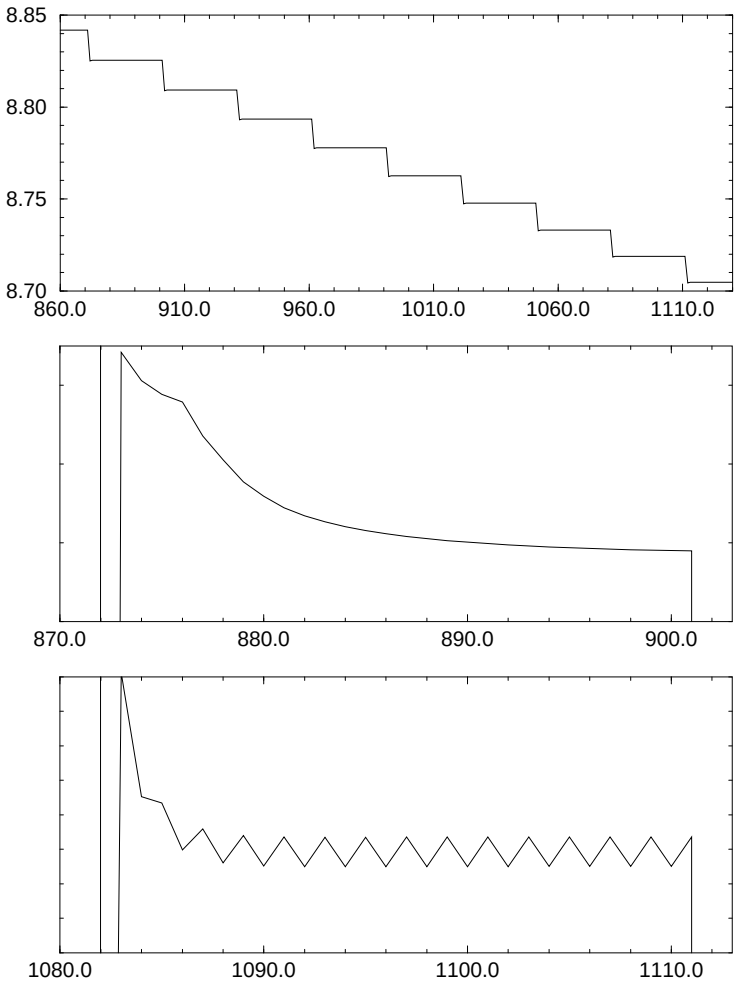

Abbildung 5.3: Zeitliche Entwicklung von u_0 über 9 Zeitschritte à 30 Iterationszyklen. (a) Gesamtbild; (b) Ausschnitt mit konvergenter Iteration; (c) Ausschnitt mit Oszillation

fortlaufend gezählte Iterationsnummer i aufgetragen, wobei ein Zeitschritt immer 30 Iterationsschritte umfaßt. Scheinbar konvergiert die Iteration in jedem Zeitschritt sehr schnell und u_0 erreicht schon fast nach dem ersten Iterationszyklus ein Plateau. Dieses Bild bestätigt sich, wenn man den Zeitschritt $871 \leq i < 901$ stark vergrößert darstellt, wie dies in Bild 5.3b zu sehen ist. Während der Wert von u_0 zu Beginn des Zeitschrittes nach unten überschwingt, erreicht er danach rasch monotone Konvergenz, die ab $i=876$ in guter Näherung exponentiell verläuft.

Vergrößert man aber statt des eben gezeigten Zeitschritts den von $i=1081$ bis 1110, so sieht man (Abbildung 5.3c), daß, was vorhin wie

ein Plateau aussah, hier in Wirklichkeit eine Oszillation mit zwar sehr kleiner, aber konstanter Amplitude darstellt und wir es nicht mehr mit einem *Fixpunkt* der Iteration zu tun haben wie in Bild 5.3b, sondern mit einem *zweipunktigen Attraktor*. In einigen wenigen Fällen besaß die Oszillation gar die Periode 4 (es lag also ein vierpunktiger Attraktor vor), und schließlich gab es Zeitschritte, in denen im Verlauf der Iteration zwar die Abweichungen von einem Mittelwert relativ klein blieben, aber andererseits keinerlei Periodizität zu erkennen war — ein Verhalten, das ich aus sogleich näher auszuführender Analogie einem *chaotischen Attraktor* zuschreiben möchte.

In dieser Situation ist es naheliegend, den Zeitschritt δt in der Hoffnung zu verringern, daß damit die Iteration stabilisiert wird. In der Tat kann man sich einfache Beispiele überlegen, in denen numerisches Chaos bei der Diskretisierung von Differentialgleichungen auftritt, für hinreichend kleine Werte von δt aber wieder verschwindet. Indessen zeigte der Versuch, den Zeitschritt um bis zu zwei Größenordnungen (auf weniger als eine Sekunde) zu reduzieren, nicht die gewünschte Wirkung, und das oszillierende und chaotische Verhalten traten unverdrossen weiter auf.

Das Feigenbaum-Szenario

Insgesamt erinnert das Verhalten des iterierten Systems sehr an das Feigenbaum-Szenario für den Übergang vom geordneten Verhalten zum deterministischen Chaos auf dem Weg der Periodenverdoppelung, (May, 1976; Feigenbaum, 1978). Dabei wird (im einfachsten Beispiel) das Verhalten der *logistischen Funktion*

$$\varphi(x) = \alpha \cdot x(1-x) \tag{5.61}$$

unter der Iteration

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) \,, \qquad 0 < x_0 < 1 \tag{5.62}$$

in Abhängigkeit vom Parameter $\alpha \in (1, 4]$ untersucht.

Für $1<\alpha\leq 3$ konvergiert $\{x_n\}$ gegen den Fixpunkt

$$x_* = 1 - \frac{1}{\alpha} \tag{5.63}$$

von φ. Im Intervall $3 < \alpha \leq 1+\sqrt{6} \approx 3.4495$ oszilliert das System zwischen den beiden Punkten

$$x_{1,2} = \frac{\alpha+1 \pm \sqrt{(\alpha-3)(\alpha+1)}}{2\alpha} \tag{5.64}$$

hin und her. Dieser zweipunktige Attraktor macht für $3.4495 < \alpha \leq 3.5441$ einem vierpunktigen Platz, der dann in einer weiteren Periodenverdoppelung von einem achtpunktigen abgelöst wird, und so fort, bis bei $\alpha \approx 3.5699$ die Periode 2^∞ erreicht ist.

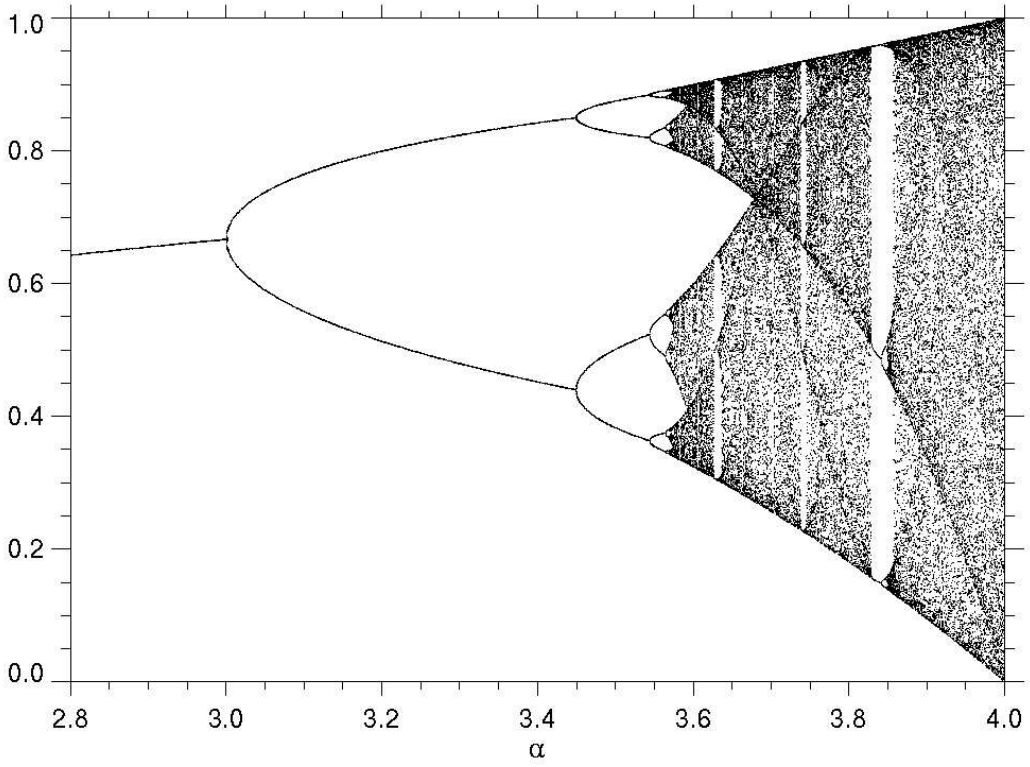

Abbildung 5.4: Feigenbaum-Diagramm. Es zeigt die Attraktoren der logistischen Iteration in Abhängigkeit vom Parameter α

In Abbildung 5.4 ist der Attraktor als Funktion von α gezeigt, indem jeweils etwa 200 Punkte eingetragen sind, die nach längerer Iteration durchlaufen werden. Man erkennt, daß im chaotischen Bereich $3.5699 < \alpha < 4$ noch ein paar periodische Fenster und noch weitere Strukturen auftreten. Dieses ganze qualitative Verhalten und sogar bestimmte quantitative Aussagen sind nicht auf die logistische Parabel

beschränkt, sondern treten universell für eine große Klasse von Iterationsfunktionen auf (Feigenbaum, 1978; 1979).

Nehmen wir nun — um diesen Exkurs in die Chaostheorie wieder in einen (zugegebenermaßen sehr indirekten) Zusammenhang mit der Marsatmosphäre zu stellen — an, daß die betrachtete Iteration mit der logistischen Funktion $\varphi(x)$ vom Versuch herrührt, dergestalt von irgendeinem Startwert aus den Fixpunkt (5.63) von φ zu berechnen. Für $1<\alpha<3$ wird dies auch funktionieren, und der «Gabelstiel» links in Abbildung 5.4 stellt in der Tat ein Stück der Kurve $x = 1-1/\alpha$ dar. Ab $\alpha=3$ aber wird der Fixpunkt instabil, was man daran abliest, daß $|\varphi'(x_*)| = |2-\alpha|$ größer als 1 wird, und statt seiner erhält man bei der Iteration andere Werte, die auf irgendeiner der Verzweigungen oder im anschließenden chaotischen Bereich liegen. Damit ist in diesem Parameterbereich, so interessant er zweifellos für die Chaostheorie ist, das einfache Iterationsschema (5.62) für die Gewinnung des Fixpunktes x_* unbrauchbar.

Auf der Suche nach abgeänderten Iterationsvorschriften kann man sich nun von der Beobachtung leiten lassen, daß die Verzweigung bei α=3 annähernd symmetrisch verläuft, und der Mittelwert aus den beiden Punkten x_1 und x_2 des Attraktors in der Nähe von $\alpha=3$ eine brauchbare erste Näherung für den Fixpunkt zu sein scheint. Dieser Umstand legt es nahe, anstatt (5.62) die Iterationsvorschrift

$$x_{n+1} = \tilde{\varphi}(x) := \frac{x_n + \varphi(x_n)}{2} \tag{5.65}$$

heranzuziehen, und es zeigt sich, daß sie die bescheidenen Hoffnungen, von denen man sich leiten ließ, bei weitem übertrifft. Nicht nur, daß für die neue Iterationsfunktion $\tilde{\varphi}$ der Fixpunkt $x_* = 1-1/\alpha$ im ganzen zulässigen Parameterbereich wegen

$$|\tilde{\varphi}'(x_*)| = \frac{3-\alpha}{2} < 1 \qquad \text{für } 1<\alpha\le 4 \tag{5.66}$$

stabil ist, er ist darüber hinaus auch *globaler Attraktor* im Intervall $(0,1)$, es gibt also keinerlei Chaos mehr für $\tilde{\varphi}$, sondern jeder Startwert zwischen 0 und 1 führt letztlich auf den Fixpunkt x_*. Der bescheidene Preis, den man dafür zu zahlen hat, besteht darin, daß die Iteration mit

$\tilde{\varphi}$ im Intervall $1 < \alpha < 2.5$ langsamer konvergiert als die mit φ, da dort

$$|\varphi'(x_*)| < |\tilde{\varphi}'(x_*)| \tag{5.67}$$

ist.

In voller Analogie zu dieser Vorgehensweise im Fall der logistischen Funktion (5.61) habe ich nun das iterierte implizite Verfahren abgewandelt, indem ich nach jedem Schritt den alten Wert Var_{alt}^{n+1} der gerade zu berechnenden Variablen Var nicht durch die Lösung Var_{neu}^{n+1} des entsprechenden Gleichungssystems, sondern durch $(Var_{\mathrm{alt}}^{n+1} + Var_{\mathrm{neu}}^{n+1})/2$ ersetzt habe. Damit verschwand schlagartig der Großteil der Sprünge und Unregelmäßigkeiten in den Rechnungen, und nur nachts zeigten sich während einiger Zeitschritte noch Reste davon. Um auch diese zu beseitigen, erwies es sich als ausreichend, unter bestimmten Bedingungen in der Verallgemeinerung

$$\tilde{\varphi}(x) := (1-q)x + q\varphi(x) \tag{5.68}$$

von (5.65) das Gewicht von φ mit $q < 1/2$ noch weiter herabzusetzen, was im allgemeinen die Zahl der benötigten Iterationsschritte erhöht, die genannten Probleme aber endgültig beseitigt.

Es sei noch angemerkt, daß die chaotischen Effekte meines Erachtens ausschließlich numerischer Natur sind, was nicht zuletzt dadurch belegt wird, daß sie durch eine Änderung des numerischen Verfahrens zum Verschwinden gebracht werden können. Dies ist nicht selbstverständlich, da in meteorologischen Systemen durchaus Chaos auftreten kann, und eines der bekanntesten chaotischen Systeme — das Lorenzmodell (Lorenz, 1963) — ursprünglich durch die Modellierung thermischer Konvektion in meteorologischen Anwendungen motiviert war. Allerdings lassen weder der Grad der Stilisierung noch die ins chaotische Régime führende Parameterwerte im Lorenzmodell noch irgendeine meteorologische Interpretation der Ergebnisse zu.

Kapitel 6

Der Transport des Staubes

6.1 Dynamik

6.1.1 Bewegung in ruhiger Atmosphäre

Ein Staubteilchen, das in der ruhigen Atmosphäre sich selbst überlassen bleibt, wird in äußerst kurzer Zeit eine konstante Geschwindigkeit erreichen, die abwärts gerichtet ist, und bei der sich der Strömungswiderstand F_{R} und die Schwerkraft F_{G} kompensieren. Nach der *Stokesschen Formel* der Hydrodynamik ist für ein sphärisches Teilchen

$$F_{\mathrm{R,Stokes}} = -6\pi\,\eta\,r\,u\ , \tag{6.1}$$

wobei η die dynamische Viskosität des Mediums (des atmosphärischen Gases) ist, r der Radius des Teilchens und u seine Geschwindigkeit relativ zum Medium. Da die Schwerkraft auf ein Teilchen der Dichte ϱ_{d} durch

$$F_{\mathrm{G}} = \frac{4\pi}{3}\varrho_{\mathrm{d}}\,r^3 g \tag{6.2}$$

gegeben ist, folgt eine (negative, da nach unten gerichtete) Sinkgeschwindigkeit von

$$w_{\mathrm{sink\,(Stokes)}} = -\frac{2}{9}\frac{\varrho_{\mathrm{d}}\,g r^2}{\eta}\ , \tag{6.3}$$

die vom Druck unabhängig ist, da η bei Gasen praktisch nicht vom Druck abhängt.

Die Stokessche Formel ist aber nicht universell gültig, sondern nur unter bestimmten Bedingungen. Die in der makroskopischen Welt wichtigste Einschränkung ist die der kleinen Reynoldszahl (4.3), nach der $\mathrm{Re} \lesssim 0.5$ gelten muß, damit die Stokessche Formel anwendbar ist. Atmosphärische Teilchen im Größenbereich $r \lesssim 10\,\mu\mathrm{m}$ nehmen diese Hürde mit Bravour, da sie sowohl einen sehr kleinen Radius, als auch eine kleine Fallgeschwindigkeit haben. Eine andere Einschränkung des Gültigkeitsbereichs von (6.1) spielt in der Erdatmosphäre für sehr kleine Partikel oder in großen Höhen eine Rolle. Sie besteht darin, daß auch die Knudsen-Zahl

$$\mathrm{Kn} := \frac{l_\mathrm{f}}{r} \ll 1 \;, \tag{6.4}$$

also die Mittlere Freie Weglänge l_f eines Gasmoleküls klein gegen den Teilchenradius r sein muß, da es sonst nicht mehr gerechtfertigt ist, das Gas als Kontinuum zu betrachten, wodurch der Strömungswiderstand stark reduziert wird.

Aus kinetischen Rechnungen folgt, daß im Fall großer Knudsen-Zahlen statt der Stokes-Formel (6.1) die *Chapman-Enskog-Formel*

$$F_\mathrm{R,ChEn} = -\frac{8}{3}\varrho r^2 \sqrt{\frac{2\pi kT}{m}}\; u \;, \tag{6.5}$$

gilt, wobei ϱ die Gasdichte, m die Molekülmasse und k die Boltzmannkonstante bezeichnet.

Im Bereich mittlerer Knudsen-Zahlen ergibt sich, wie beispielsweise bei Pruppacher und Klett (1997) ausgeführt, aus Messungen ein Korrekturfaktor $(1 + \alpha\mathrm{Kn})$ zur Stokesschen Formel, was auf die Sinkgeschwindigkeit

$$w_\mathrm{sink} = -\frac{2}{9}\frac{\varrho_\mathrm{d}\, g r^2}{\eta} \cdot (1 + \alpha\mathrm{Kn}) \tag{6.6}$$

führt. Dabei berechnet sich der nach *Cunningham* benannte Korrekturterm der Analyse von Davies (1945) zufolge aus

$$\alpha = 1.257 + 0.400 e^{-\frac{1.1}{\mathrm{Kn}}} \;. \tag{6.7}$$

Für $\mathrm{Kn} \to \infty$ liefert der Korrekturterm (6.7) tatsächlich die Chapman-Enskog-Formel, falls die Mittlere Freie Weglänge gemäß

$$l_\mathrm{f} := 1.702 \cdot \frac{\eta}{\varrho}\sqrt{\frac{m}{kT}} \tag{6.8}$$

berechnet wird. Aus (6.8) läßt sich mit Hilfe der *Sutherlandschen Formel* (siehe z. B. Schiller, 1931)

$$\eta = B\frac{\sqrt{T}}{1+\frac{C}{T}}\ , \tag{6.9}$$

$$B = 1.655\cdot 10^{-6}\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m\,s}\sqrt{\mathrm{K}}}\ , \qquad C = 274\,\mathrm{K} \tag{6.10}$$

für CO_2 die Mittlere Freie Weglänge und damit über die Knudsen-Zahl für einen gegebenen Teilchenradius die Sinkgeschwindigkeit w_{sink} bestimmen.

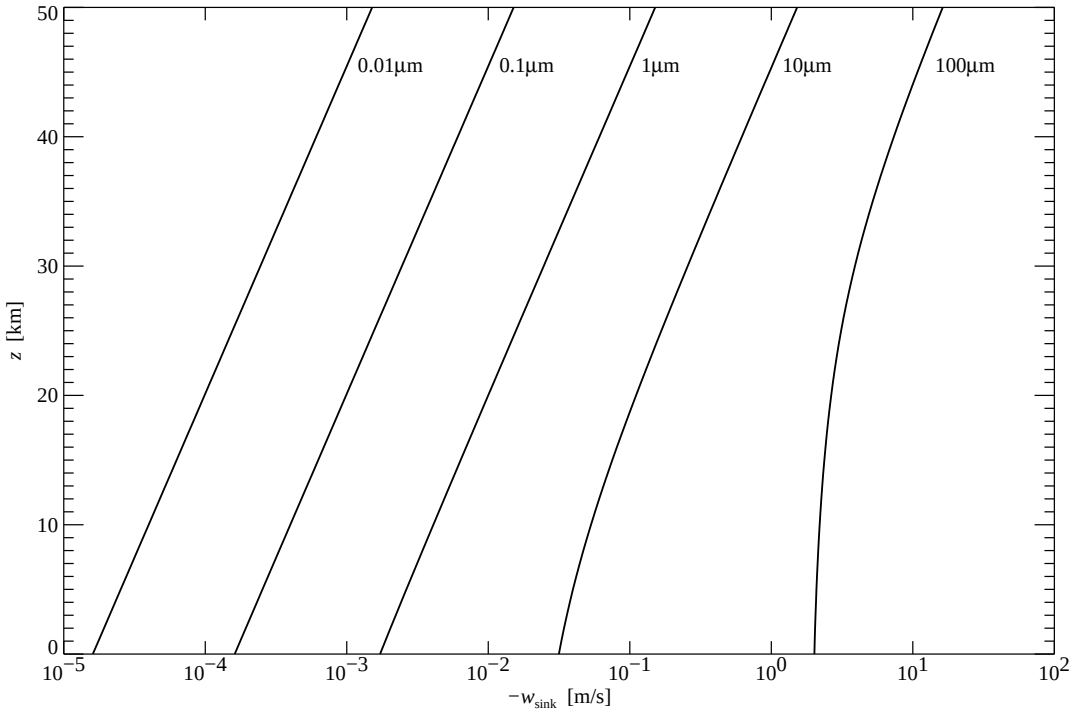

Abbildung 6.1: Sinkgeschwindigkeiten in der Marsatmosphäre für verschiedene Teilchenradien r. Zugrundegelegt wurde eine Partikeldichte $\varrho_{\mathrm{d}} = 2\,400\,\mathrm{kg/m^3}$, ein Oberflächendruck von $700\,\mathrm{Pa}$ und eine konstante atmosphärische Temperatur von $210\,\mathrm{K}$

Abbildung 6.1 zeigt die dergestalt berechneten Sinkgeschwindigkeiten von Teilchen verschiedener Größe in Abhängigkeit von der Höhe. Die Linien verlaufen in der halblogarithmischen Darstellung fast gerade, was andeutet, daß sich die Bewegung bereits im Chapman-Enskog-

Régime abspielt, wo die Sinkgeschwindigkeit umgekehrt proportional zum Druck ist und damit exponentiell mit der Höhe anwächst. Ähnliche Rechnungen findet man auch bei Anderson (1967); allerdings geht er von einer falschen Zusammensetzung der Atmosphäre aus, so daß seine Zahlen hier nicht verwendet werden können.

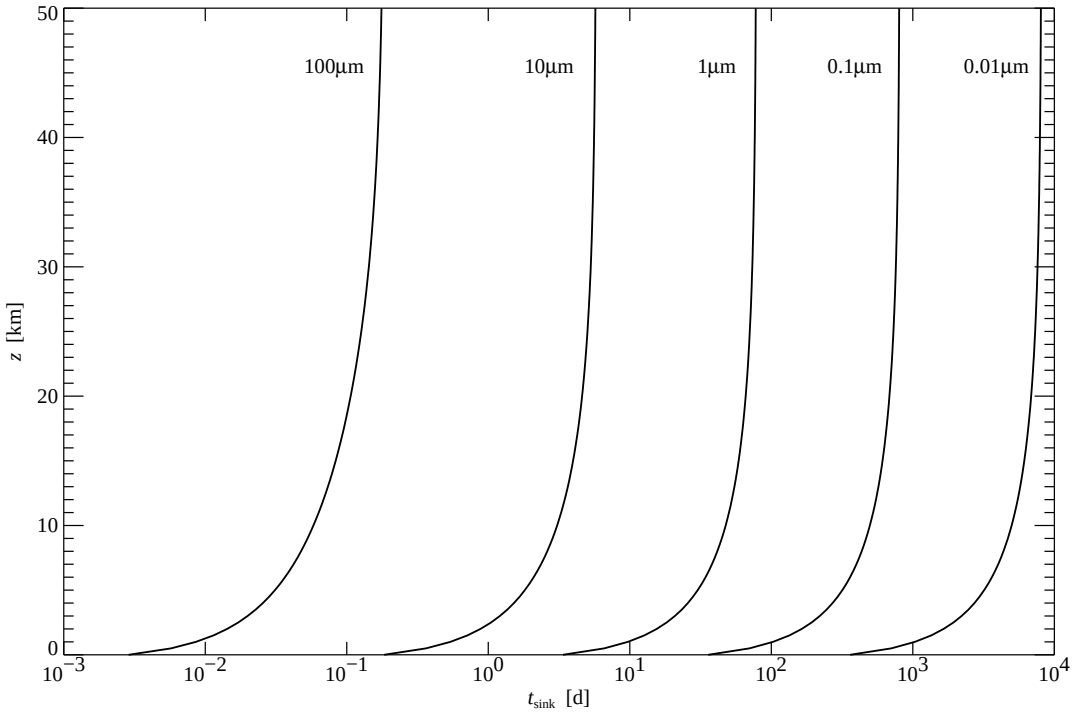

Abbildung 6.2: Fallzeiten aus der Höhe z zur Oberfläche. Das Modell ist das selbe wie in Abbildung 6.1.

In Abbildung 6.2 sind die zugehörigen Fallzeiten aus der Höhe z auf die Oberfläche als Funktion von z dargestellt. $|w_{\mathrm{sink}}|$ wächst so schnell mit der Höhe, daß die Fallzeit für $z \to \infty$ einen endlichen Grenzwert besitzt. Natürlich fällt ein Teilchen in realiter nicht in endlicher Zeit aus dem Unendlichen auf die Oberfläche, aber die Prozesse, die dies verhindern (wie etwa das Abklingen der Schwerkraft mit wachsender Entfernung vom Planeten oder die wachsende Relaxationszeit zum Erreichen des Gleichgewichts zwischen Schwerkraft und Strömungswiderstand) spielen in dem Höhenbereich, der in den Abbildungen 6.1 und 6.2 dargestellt ist, noch keine Rolle.

Alle soweit angegebenen Formeln und auch die Abbildungen 6.1 und 6.2 gelten zunächst nur für sphärische Teilchen. Die Abweichungen echter Aerosol-Teilchen von der Kugelform spielen aber für die Dynamik des Staubes eine recht kleine Rolle (Davies, 1945; Horvath, 1979).

Abschließend halten wir fest, daß kleine Aerosolteilchen sich immer mit der vertikalen Geschwindigkeit w_{sink} relativ zum umgebenden Gas bewegen werden (die Relaxationszeiten zum Erreichen dieser Geschwindigkeit sind extrem kurz), auch wenn dieses sich bewegt.

6.1.2 Bewegung in turbulenter Atmosphäre

Eines der Ziele der vorliegenden Arbeit ist es, die Dynamik einer Population von Aerosolteilchen in das in Kapitel 5 beschriebene Modell der Planetaren Grenzschicht einzubauen. Zu diesem Zweck definieren wir zunächst das Mischungsverhältnis q des Staubes (oder einer Teilpopulation desselben) als seinen Massenanteil in einem gegebenen atmosphärischen Volumen,

$$q := \frac{m_{\mathrm{d}}}{m_{\mathrm{ges}}} \; , \tag{6.11}$$

wobei die Gesamtmasse des Volumens m_{ges} getrost mit der des atmosphärischen Gases gleichgesetzt werden kann, da die Werte von q selbst während Staubstürmen selten höher als 10^{-4} sind. Die Massendichte ϱ_{Ae} des Aerosols in der Atmosphäre — die nicht zu verwechseln ist mit der um viele Größenordnungen höheren Dichte ϱ_{d} der einzelnen Partikel — berechnet sich dann als das Produkt der «Staubigkeit» q und der Gasdichte ϱ,

$$\varrho_{\mathrm{Ae}} = q \cdot \varrho \; . \tag{6.12}$$

Da es in der Atmosphäre keine Quellen und Senken für die marsianischen Staubpartikel gibt — die Kondensation von Wasser soll hier ausdrücklich nicht betrachtet werden — gilt die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial(q\varrho)}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_{\mathrm{d}} = 0 \; . \tag{6.13}$$

Dabei beinhaltet die Massenstromdichte $\mathbf{j}_{\mathrm{d}}$ des Staubes sowohl Mitbewegungen mit dem und Driftbewegungen relativ zum atmosphärischen

Gas, als auch turbulente Diffusion. Wenn wir für den Moment einmal von turbulenten Effekten absehen — diese werden anschließend in Analogie zu den K-ε-Gleichungen formuliert — können wir für eine Population identischer Staubteilchen, die sich mit dem Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}$ bewegt, die Kontinuitätsgleichung auch in der Form

$$\frac{\partial(q\varrho)}{\partial t} + \operatorname{div} q\varrho\mathbf{v} = 0 \tag{6.14}$$

schreiben. Nach der Produktregel ist

$$\frac{\partial(q\varrho)}{\partial t} = \varrho\frac{\partial q}{\partial t} + q\frac{\partial \varrho}{\partial t}\ , \tag{6.15}$$

und der letzte Term läßt sich mit der Kontinuitätsgleichung für das Gas

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \varrho\mathbf{u} = 0 \tag{6.16}$$

durch die Divergenz des Gasflusses $\varrho\mathbf{u}$ ausdrücken. Dabei sind $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ im allgemeinen nicht gleich, sondern unterscheiden sich um die Driftgeschwindigkeit der Staubteilchen relativ zum Gas, in unserem Fall also um die vertikale Geschwindigkeit w_{sink}.

Das Ergebnis dieser Manipulationen lautet

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \mathbf{v}\operatorname{grad} q + \frac{q}{\varrho}\operatorname{div} \varrho(\mathbf{v}-\mathbf{u}) = \mathbf{0} \tag{6.17}$$

und läßt sich mit Hilfe der *konvektiven Ableitung*

$$\frac{dq}{dt} := \frac{\partial q}{\partial t} + \mathbf{u}\operatorname{grad} q \tag{6.18}$$

auch in der Form

$$\boxed{\frac{dq}{dt} + (\mathbf{v}-\mathbf{u})\operatorname{grad} q + \frac{q}{\varrho}\operatorname{div} \varrho(\mathbf{v}-\mathbf{u}) = 0} \tag{6.19}$$

darstellen, die nur noch die Relativgeschwindigkeit $\mathbf{v}-\mathbf{u}$ der Teilchen zum Gas enthält.

Für die eindimensionale Atmosphäre, um die es hier geht, nimmt (6.19) die Form

$$\frac{dq}{dt} + w_{\mathrm{sink}}\frac{\partial q}{\partial z} + \frac{q}{\varrho}\frac{\partial(\varrho w_{\mathrm{sink}})}{\partial z} = 0 \tag{6.20}$$

an. Da die konvektive Ableitung (6.18) mit der Geschwindigkeit $\mathbf{u}$ des Gases anstatt der Teilchengeschwindigkeit gebildet wurde, beschreibt dq/dt (6.20) die Änderung der «Staubigkeit» q für einen Beobachter, der die vertikale Bewegung der Atmosphäre mitmacht.

Wie in Abschnitt 4.4.2 diskutiert wurde, werden die höheren Atmosphärenschichten in der ersten Tageshälfte von den sich erwärmenden tieferliegenden Schichten angehoben und sinken abends wieder ab. Dabei ist die vertikale atmosphärische Geschwindigkeit in der Größenordnung $1\,\mathrm{cm/s}$ und damit für Teilchen der Größe $\lesssim 1\,\mu\mathrm{m}$ größer als $|w_{\mathrm{sink}}|$. Betrachten wir nun eine atmosphärische Schicht, die diesen Tageshub mitmacht und die Staub enthält, der sich [wie man beispielsweise an (6.20) ablesen kann] relativ zu dieser Schicht immer mit w_{sink} nach unten bewegt. Im ortsfesten Bezugssystem führen die Staubteilchen eine oszillierende Bewegung aus, die im wesentlichen der atmosphärischen Bewegung folgt. Da diese vertikale Bewegung aber — wie auch die ganze Dynamik der Planetaren Grenzschicht — in guter Näherung periodisch ist, befindet sich die Gasschicht nach Ablauf eines Marstages wieder auf der gleichen Höhe z, während der Staub tiefer gesunken ist, und zwar ziemlich genau um die gleiche Länge l_{sink}, die er auch zurückgelegt hätte, wenn die atmosphärische Schicht sich den ganzen Tag lang überhaupt nicht bewegt hätte.

Aus diesem Grund, und da der relative Tageshub der Atmosphäre klein ($< 4\%$) ist, können wir in guter Näherung in (6.20) die konvektive Ableitung durch die «ortsfeste» partielle Ableitung ersetzen, obwohl $|w_{\mathrm{sink}}| \ll |w_{\mathrm{atm}}|$, ist und erhalten damit

$$\frac{\partial q}{\partial t} + w_{\mathrm{sink}} \frac{\partial q}{\partial z} + \frac{q}{\varrho} \frac{\partial (\varrho w_{\mathrm{sink}})}{\partial z} = 0 \,. \tag{6.21}$$

In dieser Gleichung für den Staubtransport taucht die atmosphärische Vertikalgeschwindigkeit nicht mehr auf, was nicht nur zu der hier verwendeten Form (4.36) der K-ε-Gleichungen paßt, sondern vor allem das Problem entschärft, daß die numerisch berechneten Werte von w_{atm} nicht notwendigerweise die Bedingung

$$\delta z = \int_{t_0}^{t_0+1[\mathrm{d}]} w_{\mathrm{atm}}\, dt = 0 \tag{6.22}$$

der Periodizität erfüllen. Denn wenn eine numerische Drift δz, die klein gegen w_{atm}, aber groß gegen w_{sink} ist, sich der physikalischen Dynamik überlagert, kann sie das qualitative Verhalten völlig verändern.

Wenn wir nun turbulente Diffusion wieder zulassen und nach Conrath (1975) durch den Term

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial z}\left(\varrho K_q \frac{\partial q}{\partial z}\right) \tag{6.23}$$

in (6.21) eintragen — was in Analogie zur Behandlung anderer passiver Beimengungen wie vor allem Wasserdampf steht (siehe z. B. Duynkerke und Driedonks, 1987) — so erhalten wir als K-ε-Transportgleichung für die «Staubigkeit» q die Beziehung

$$\boxed{\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial z}\left(\varrho K_q \frac{\partial q}{\partial z}\right) - w_{\mathrm{sink}}\frac{\partial q}{\partial z} - \frac{q}{\varrho}\frac{\partial(\varrho w_{\mathrm{sink}})}{\partial z}} \,. \tag{6.24}$$

Dabei ist zu beachten, daß w_{sink} negativ ist; der turbulente Diffusionskoeffizient K_q wird, wiederum in Anlehnung an die Behandlung von Wasser, gleich K_u gesetzt,

$$K_q = K_u = K_\theta = c_\mu \frac{E^2}{\varepsilon} \,, \tag{6.25}$$

vgl. (4.37).

6.2 Transport in der Oberflächenschicht

In der Oberflächenschicht beschreiben wir den Staubtransport mit der Ähnlichkeitstheorie nach Monin und Obuchov. Zunächst ist der turbulente Staubfluß φ_{d} (also die Massenstromdichte für den Staub) durch

$$\varphi_{\mathrm{d}} = \varrho\,\overline{w'q'} \,, \tag{6.26}$$

gegeben, wobei q' den fluktuierenden Anteil des Staub-Mischungsverhältnisses q bezeichnet. Die Ähnlichkeitsbeziehung zwischen dem

Staubfluß und dem Gradienten von q lautet dann in Analogie zu (4.25), (4.26)

$$\frac{\partial q}{\partial z} = -\frac{\overline{w'q'}}{\kappa u_* z}\phi_\mathrm{d}\left(\frac{z}{L}\right) . \tag{6.27}$$

Die universelle Funktion ϕ_d sollte für alle passiven Beimengungen die selbe sein und wird hier, wie das für Wasserdampf üblich ist (Etling, 1987), gleich ϕ_h gesetzt; die funktionale Abhängigkeit ist in Abschnitt 4.3 angegeben.

6.3 Die numerische Behandlung des Staubtransports

Die numerische Behandlung des Staubtransports geschieht weitgehend analog zu den Ausführungen in Kapitel 5. Da der Staub im betrachteten Modell in der Planetaren Grenzschicht nur eine passive Rolle spielt, und außerdem sowohl die Transportgleichung (6.24), als auch (wie sich unten zeigen wird) die untere Randbedingung für q linear sind, braucht die diskretisierte Gleichung für q nicht in die Iterationsschleife miteinbezogen zu werden. Vielmehr wird sie nur einmal pro Zeitschritt nach der Absolvierung der Iteration gelöst, was den zusätzlichen numerischen Aufwand durch die Hinzunahme einiger (verschieden feinkörniger) Staubpopulationen unwesentlich werden läßt.

Durch die beiden letzten Terme — sogenannte *Advektionsterme* — hat Gleichung (6.24) nun nicht mehr den Charakter einer rein parabolischen Differentialgleichung; bei Abwesenheit turbulenter Diffusion wird sie gar zur eindeutig *hyperbolischen*[1] Gleichung (6.21). Wie es bei hyperbolischen Gleichungen üblich ist, diskretisieren wir die Advekti-

[1]Manche Lehrbücher (z. B. Hoffman, 1992) unterscheiden zwischen *hyperbolischen* Differentialgleichungen, die vom Typ der Wellengleichung sind und *konvektiven* Gleichungen, die nur einen Advektionsterm wie Gleichung (6.21) besitzen, und Signalausbreitung nur in eine Richtung beinhalten. Da es hier in erster Linie nur um den prinzipiellen Unterschied zwischen Diffusions- und Transportgleichungen geht, setze ich mich über diese Differenzierung hinweg.

onsterme *explizit*, also gemäß

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\delta t} = [\ldots] - (w_{\text{sink}})_k^n \frac{q_{k+1}^n - q_k^n}{\delta z} - \frac{q_k^n}{\varrho_k^n} \frac{(\varrho w_{\text{sink}})_{k+1}^n - (\varrho w_{\text{sink}})_k^n}{\delta z} \,. \tag{6.28}$$

Dabei steht $[\ldots]$ für den turbulenten Diffusionsterm, der genau wie bei den anderen Variablen behandelt wird (Abschnitt 5.2), und für das nichtäquidistante Gitter in unserem Modell ist $\delta z = z'_k$ (für $\delta\zeta \equiv 1$). Es ist keine Konsistenzverletzung, wenn wir den Diffusionsterm implizit, die Advektionsterme aber explizit diskretisieren, da ihnen ja völlig verschiedene physikalische Prozesse zugrundeliegen, die unabhängig voneinander wirken sollen.

Im Schema (6.28) wurde die erste räumliche Ableitung mit dem Ausdruck erster Ordnung (in δz)

$$\left.\frac{\partial q}{\partial z}\right|_{z_k} \longmapsto \frac{q_{k+1} - q_k}{\delta z} \tag{6.29}$$

diskretisiert, anstatt die Diskretisierung

$$\left.\frac{\partial q}{\partial z}\right|_{z_k} \longmapsto \frac{q_{k+1} - q_{k-1}}{2\delta z} \tag{6.30}$$

zu wählen, die von zweiter Ordnung in δz wäre. Der Grund liegt darin, daß das Schema sonst bei schwacher Diffusion (also etwa nachts, wenn K_q sehr klein wird) unbedingt instabil, also auch bei beliebig kleinem Zeitschritt unbrauchbar ist (siehe etwa Hoffman, 1992; Press et al., 1992). Dem läßt sich auf verschiedene Art und Weise abhelfen, wobei eine einfache und robuste Lösung im sogenannten *Upwind-Verfahren* besteht, das gerade durch die Gleichung (6.30) gegeben ist. Dabei macht man Gebrauch von der Tatsache, daß sich Signale advektiv nur nach unten ausbreiten, da stets $w_{\text{sink}} \leq 0$ ist. Das Upwind-Schema ist für eine reine Advektionsgleichung stabil, wenn die Courant-Bedingung erfüllt ist, die nun

$$\delta t < \min \frac{\delta z}{|w_{\text{sink}}|} \tag{6.31}$$

lautet. Eine einfache Stabilitätsanalyse zeigt, daß das kombinierte numerische Schema, das man erhält, wenn man den Diffusionsterm im-

plizit und die Advektionsterme nach dem Upwind-Schema explizit diskretisiert, numerisch stabil ist, falls nur die Courant-Bedingung (6.31) erfüllt ist. In den hier vorgestellten Modellrechnungen ist das bei einem Zeitschritt von $30\,\mathrm{s}$ für Teilchenradien $r \leq 10\,\mu\mathrm{m}$ stets der Fall, und somit stellt (6.31) keine zusätzliche Einschränkung des von anderen Prozessen bestimmten Zeitschritts dar.

Die untere Randbedingung ergibt sich in Analogie zur Vorgehensweise in Abschnitt 5.4.1 durch Gleichsetzen der Werte von ϕ_d, welche K-ε-Theorie und Monin-Obuchov-Theorie für das Niveau $z_{\frac{1}{2}}$ liefern. Integration der Gleichung (6.27) von der Rauhigkeitslänge h_0 bis zur Höhe z_0 führt auf

$$q(z_0) = -\frac{\overline{w'q'}}{u_*}\chi_\mathrm{d}\left(\frac{z_0}{L}, \frac{h_0}{L}\right), \tag{6.32}$$

wobei χ_d in Analogie zu (5.37) definiert ist und in praxi mit χ_h identisch ist. Nun können wir $\overline{w'q'}$ aus den diskretisierten K-ε-Gleichungen berechnen,

$$\overline{w'q'} = -K_{q,\frac{1}{2}}\frac{q_1 - q_0}{z'_{\frac{1}{2}}} \tag{6.33}$$

und erhalten aus der Kombination von (6.32) und (6.33) die gesuchte Randbedingung

$$\left(1 + \frac{u_* z'_{\frac{1}{2}}}{\chi_\mathrm{d} K_{q,\frac{1}{2}}}\right) q_0 - q_1 = 0 \tag{6.34}$$

Kapitel 7

Ergebnisse
I. Die Planetare Grenzschicht

Im vorliegenden Kapitel werden die Ergebnisse der Modellrechnungen bezüglich der Planetaren Grenzschicht beschrieben. Dabei wird der Staub als optisch aktive Beimischung zum Atmosphärengas ohne eigene Dynamik betrachtet. Die Dynamik von Staubpopulationen verschiedener Teilchenradien wird Thema von Kapitel 8 sein.

Alle Einheiten sind, sofern nicht angegeben, SI-Einheiten — mit einer Ausnahme: Als Zeiteinheit verwende ich marsianische Tage (zu 24 [irdischen] Stunden und 39 [irdischen] Minuten), marsianische Stunden (definiert als 1/24 Marstag), Minuten und Sekunden (die in naheliegender Weise definiert sind). Das bietet sich bei der ähnlichen Tageslänge von Mars und Erde an und macht die dargestellten Ergebnisse anschaulicher. Darüberhinaus sind alle angegebenen Zeiten lokale Tageszeiten, die Sonne kulminiert also pünktlich um 12:00 Uhr mittags.

7.1 Modellbeschreibung

Die Parameter des Modells sind weitgehend an dem Modell von Haberle (Haberle et al., 1993; Zent et al., 1993) orientiert, in welchem die Planetare Grenzschicht des Mars über dem Landeplatz von *Viking-1* nach der Landung der Sonde (im späten Nordsommer) simuliert wird. Dies ist eine ruhige Jahreszeit, und die weitere Umgebung des Landeplatzes

scheint hinreichend gleichförmig zu sein, so daß ideale Bedingungen für ein eindimensionales Modell der Planetaren Grenzschicht vorliegen.

Parameter	*Wert*
Zahl der Gitterpunkte	100 (Atmosphäre)
	20 (Boden)
Oberflächendruck	$730\,\mathrm{Pa}$
Areographische Länge	$23^\circ\mathrm{N}$
Jahreszeit	$L_\mathrm{s} = 110^\circ$(Spätsommer)
Visuelle optische Tiefe	0.35
Oberflächenalbedo	0.32
Thermische Trägheit	$215\,\mathrm{J/(m^2K\sqrt{s})}$
Wärmeleitfähigkeit im Boden	$0.043\,\mathrm{m/(m\,K)}$
Rauhigkeitslänge	$0.01\,\mathrm{m}$
Geostrophische Windgeschwindigkeit	$10\,\mathrm{m/s}$
Numerischer Zeitschritt	$30\,\mathrm{s}$

Tabelle 7.1: Die verwendeten Modellparameter

Einige zentrale Begriffe seien hier noch einmal kurz zusammengefaßt. Die *Oberflächenschicht* ist die Schicht in Oberflächennähe, in der sich die turbulenten Flüsse von Energie und Impuls nicht merklich ändern, sie ist typischerweise etwa $100\,\mathrm{m}$ dick. Die *konvektive / turbulente / durchmischte Schicht* existiert (in erster Näherung) nur tagsüber und verändert ihre Höhe stark im Lauf des Tages. Die *Planetare Grenzschicht* schließlich umfaßt den ganzen Bereich der (unteren) Atmosphäre, der irgendwann im Laufe des Tages turbulent wird und hat eine feste Höhe von (in den vorliegenden Rechnungen) knapp $4\,\mathrm{km}$.

7.2 Ergebnisse

7.2.1 Gitter und Temperatur im Boden

Abbildung 7.1 zeigt die beiden numerischen Gitter, die in der Atmosphäre und im Boden verwandt wurden. Eingezeichnet ist neben den Gitterniveaus auch der Verlauf der Funktionen $z(\zeta)$, mit deren Hilfe ein

äquidistantes Gitter ζ_i auf das jeweilige stark nichtäquidistante Gitter abgebildet wurde (vgl. Abschnitt 5.2). In beiden Fällen wurde für die Funktion $z(\zeta)$ ein Hyperbelsinus gewählt, der den Vorteil hat, für kleines Argument linear, für großes hingegen exponentiell zu verlaufen.

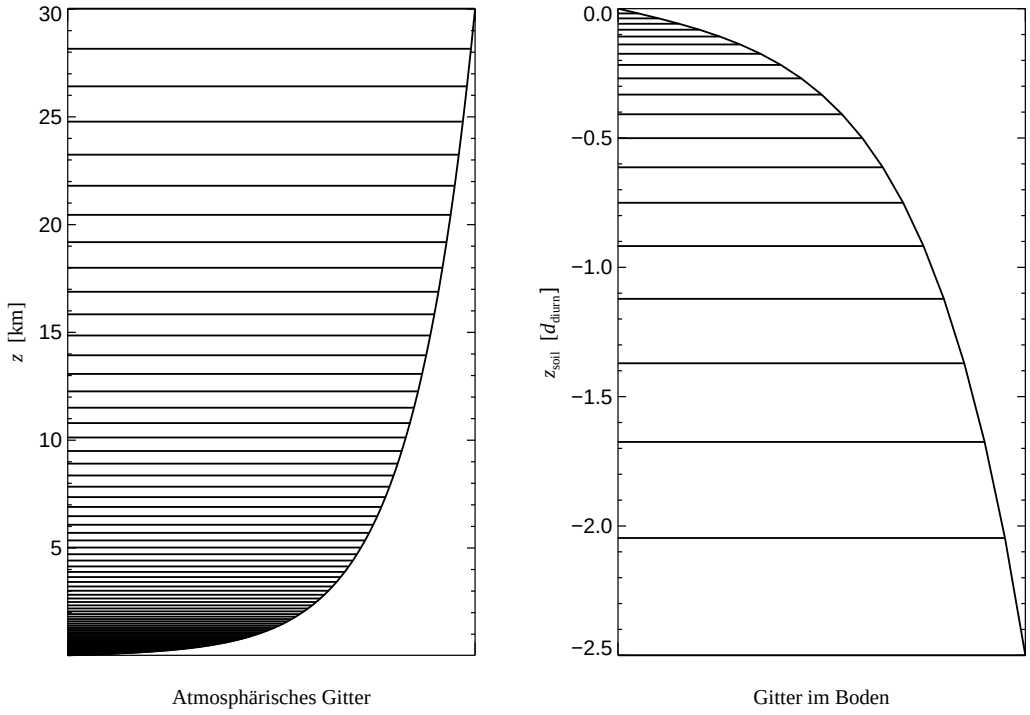

Abbildung 7.1: Die numerischen Gitter in der Atmosphäre (links) und im Boden (rechts)

Als Einheit für die Tiefe wurde im Bodengitter die thermische Tages-Skintiefe

$$d_{\mathrm{diurn}} = \frac{\lambda}{I}\sqrt{\frac{2}{\Omega}}\,, \tag{7.1}$$

also die Eindringtiefe der thermischen Welle mit der Kreisfrequenz $\Omega = 2\pi/1\,\mathrm{sol}$ in ein Medium der Wärmeleitfähigkeit λ und der Thermischen Trägheit I gewählt, da eine absolute Längenskalierung wie früher angemerkt, nicht unbedingt sinnvoll ist; mit den angegebenen Werten ergibt sich $d_{\mathrm{diurn}} \approx 3.3\,\mathrm{cm}$. Man sieht, daß sich der Abstand zwischen den Niveaus in beiden Gittern stark verändert: im atmosphärischen Gitter von $6.4\,\mathrm{m}$ auf fast $1\,900\,\mathrm{m}$ und im Gitter für den Boden von 0.018 Einheiten auf 0.45.

Das numerische Modell wurde zunächst mit einigermaßen willkürlichen Anfangsbedingungen gestartet und erreichte nach drei simulierten Tagen annähernd einen sich periodisch widerholenden Zustand. Der nach zehn Tagen gemachte «Schnappschuß» aller Variablen diente als Anfangsbedingung für alle weiteren Rechnungen.

Abbildung 7.2 zeigt die zeitliche Variation des Temperaturverlaufs im Boden. Man erkennt deutlich, wie die von den Tagesschwankungen der Temperatur verursachte thermische Welle nach unten läuft, dabei aber stark gedämpft wird.

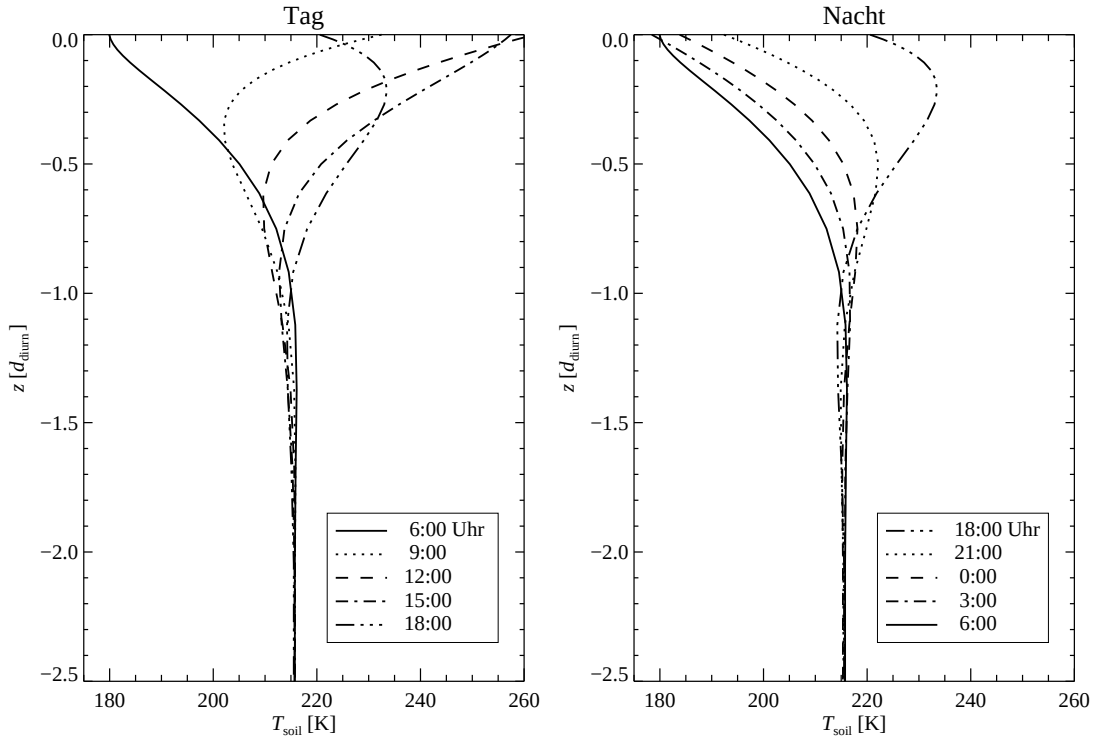

Abbildung 7.2: Ausbreitung der thermischen Tageswelle im Boden. Links: tagsüber, rechts: nachts

Die Entwicklung der Oberflächentemperatur im Verlauf eines Tages ist in Abbildung 7.3 dargestellt. Die Übereinstimmung mit den Temperaturwerten, die Kieffer (1976) aus Infrarotbeobachtungen der *Viking*-Satelliten für etwa die gleiche Zeit bestimmt hat, ist ausgezeichnet. Das ist auch nicht besonders verwunderlich, da die Oberflächentemperatur zu den Parametern gehört, die am wenigsten auf

Details des Modells reagieren. Da der turbulente Wärmestrom H durch die Atmosphäre nur etwa 4 % der eingespeisten Sonnenstrahlung beträgt, wird die Oberflächentemperatur in guter Näherung durch das Gleichgewicht zwischen Einstrahlung, Wärmepufferung durch den Boden, und Infrarotemission der Oberfläche bestimmt. Damit spielen die Einzelheiten der atmosphärischen Prozesse nur eine kleine Rolle, und abweichende Ergebnisse erhält man nur, wenn man andere Oberflächenparameter betrachtet. Daher stimmen unsere Ergebnisse auch gut mit denen von Zent et al. (1993) überein, von denen ja die meisten Parameter übernommen sind, während sich im Modell von Savijärvi (1995), der eine höhere Thermische Trägheit annimmt, eine etwas geringere Tagesamplitude des Temperaturverlaufs ergibt.

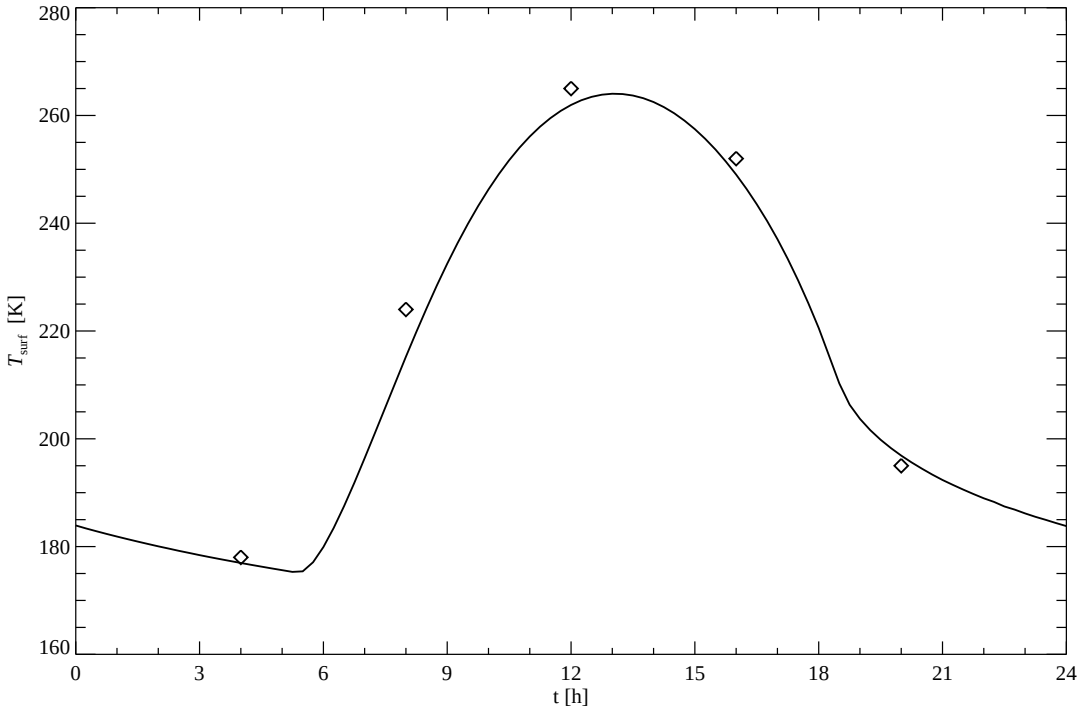

Abbildung 7.3: Variation der Oberflächentemperatur über einen Tag. Durchgezogene Linie: Ergebnisse der Modellrechnungen; Rauten: Oberflächentemperaturen nach Kieffer (1976)

7.2.2 Die Parameter der Oberflächenschicht

Abbildung 7.4a-c zeigt die Entwicklung der Größen H, L, u_*, welche die Oberflächenschicht charakterisieren (siehe Abschnitt 4.3). Der konvektive Wärmefluß ist nachts gering und verläuft tagsüber im wesentlichen proportional zur Sonneneinstrahlung (die gestrichelte Linie in Abbildung 7.4d). Bei genauerem Hinschauen fallen die negativen Werte auf, die H in den frühen Morgen- und späten Abendstunden annimmt. Sie kommen dadurch zustande, daß die Geschwindigkeitsscherung in Oberflächennähe auch bei leicht stabil geschichteter Atmosphäre Turbulenz hervorruft, so daß Wärmetransport auch dann stattfindet, wenn die Oberfläche noch (oder wieder) etwas kälter ist als die darüberliegenden Atmosphärenschichten. Der Effekt ist am Abend noch ausgeprägter, da dann zusätzlich noch Restturbulenz vom Tag übrig ist, die erst allmählich zerfällt (siehe auch Bild 7.14).

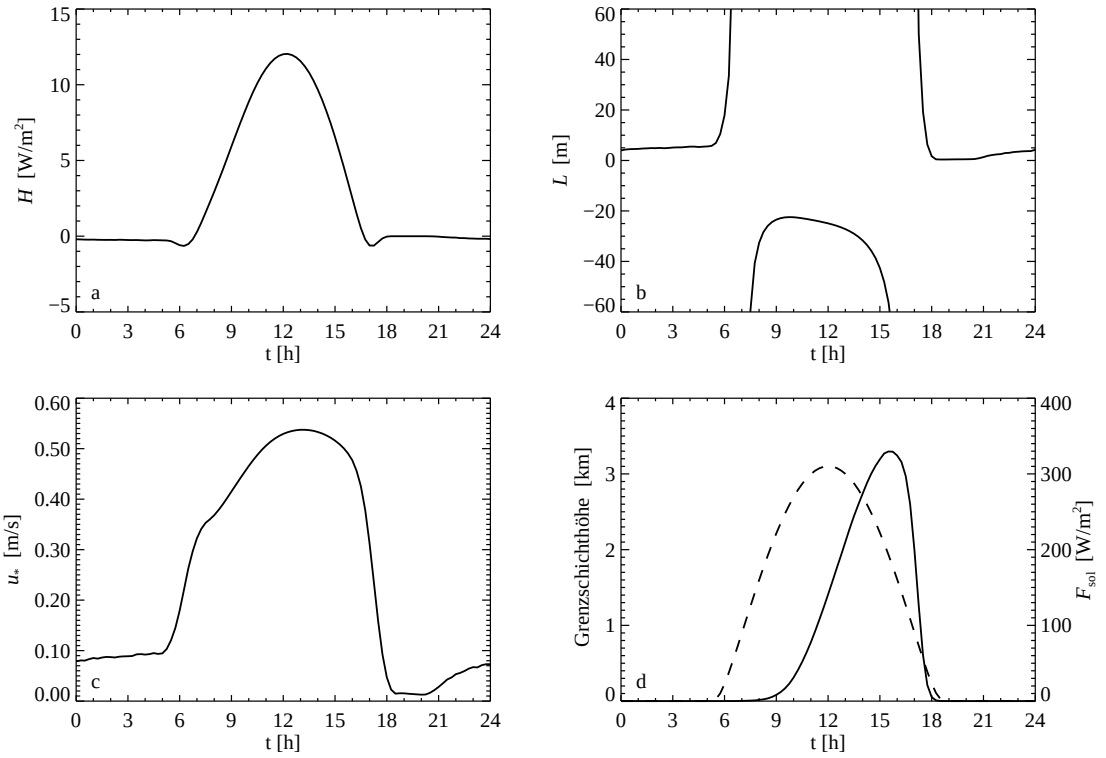

Abbildung 7.4: Zeitliche Variation von Parametern der Oberflächenschicht und der Grenzschichthöhe. (a) Turbulenter Wärmefluß H; (b) Monin-Obuchov-Länge L; (c) Reibungsgeschwindigkeit u_*; (d) Höhe der Planetaren Grenzschicht (durchgezogene Linie) und Sonneneinstrahlung (gestrichelte Linie)

Zum Vergleich ist in Abbildung 7.5 der zeitliche Verlauf von H aufgetragen, wie er von Sutton et al. (1978) aus Messungen der *Viking*-Sonden bestimmt wurde — allerdings in einem recht indirekten Verfahren, so daß sie für die Werte von H einen Meßfehler von mindestens 20–50 % angeben. Im Rahmen dieses systematischen Fehlers ist die Übereinstimmung zwischen der Kurve in Bild 7.4a und der gestrichelten Linie in Bild 7.5 zufriedenstellend.

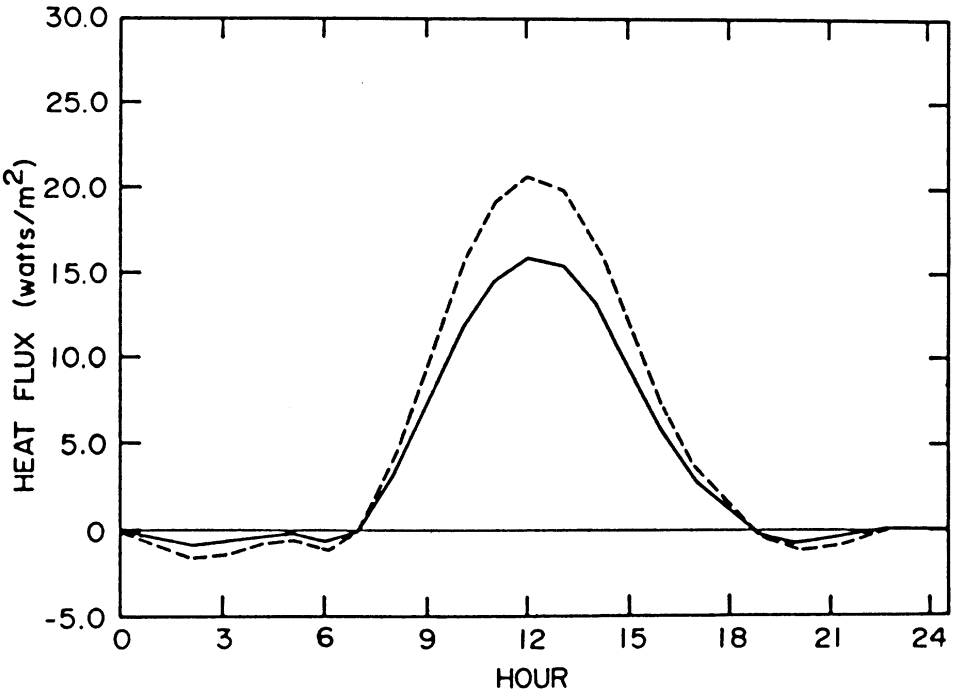

Abbildung 7.5: Turbulenter Wärmefluß H als Funktion der Tageszeit nach Sutton et al. (1978). Die durchgezogene Linie ist für eine Rauhigkeitslänge $h_0 = 0.1\,\mathrm{cm}$, die gestrichelte Linie für den auch in unserem Modell gebrauchten Wert $h_0 = 1\,\mathrm{cm}$

Abbildung 7.4b zeigt die Entwicklung der Monin-Obuchov-Länge. Hier könnte man von Übereinstimmung mit den von Sutton et al. (1978) ermittelten Werten (siehe Abbildung 7.6) nur dann sprechen, wenn man eine der Graphiken umskalieren würde, da das Tagesmaximum bei (Sutton et al., 1978) einen Wert von ca. $-3\,\mathrm{m/s}$ annimmt, während es laut unseren Modellrechnungen einen Wert von etwa $-25\,\mathrm{m/s}$ annimmt.

Mit einem anderen Verfahren, aber ebenfalls aus den *Viking*-Daten haben Tillman et al. (1994) die Monin-Obuchov-Länge bestimmt. Ihre

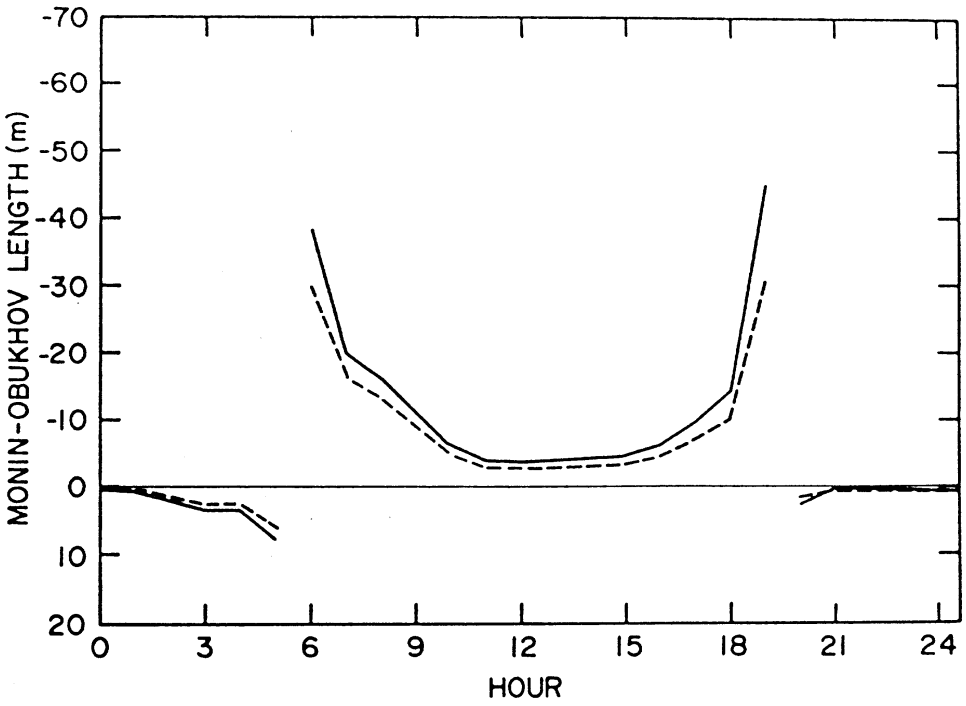

Abbildung 7.6: Monin-Obuchov-Länge nach Sutton et al. (1978). Durchgezogene Linie: $h_0 = 0.1\,\mathrm{cm}$; gestrichelte Linie: $h_0 = 1\,\mathrm{cm}$, wie auch in unseren Modellrechnungen

Ergebnisse sind in Abbildung 7.7 dargestellt und unterscheiden sich im Tagesmaximum um mindestens eine Größenordnung von den in Abbildung 7.6 dargestellten, was die Autoren nicht daran hindert zu schreiben «The order of magnitude is like that found by Sutton et al. (1978)...» Zusammenfassend kann man festhalten, daß unsere Ergebnisse für die Monin-Obuchov-Länge zwischen den Messungen von Sutton et al. (1978) und denen von Tillman et al. (1994) liegen und in diesem Sinn den (offenbar sehr unklaren) Beobachtungen so wenig wie möglich widersprechen.

Die Reibungsgeschwindigkeit ist in Abbildung 7.4c dargestellt. Sie stimmt von der Größenordnung her gut mit den in Bild 7.8 gezeigten Meßwerten von Sutton et al. (1978) überein — was nicht im eben zitierten Sinn zu verstehen ist — auch wenn der genaue Verlauf etwas anders ist.

Abbildung 7.4d zeigt die Sonneneinstrahlung an der Oberfläche — genauer gesagt, den visuellen Strahlungsfluß, der von der Oberfläche

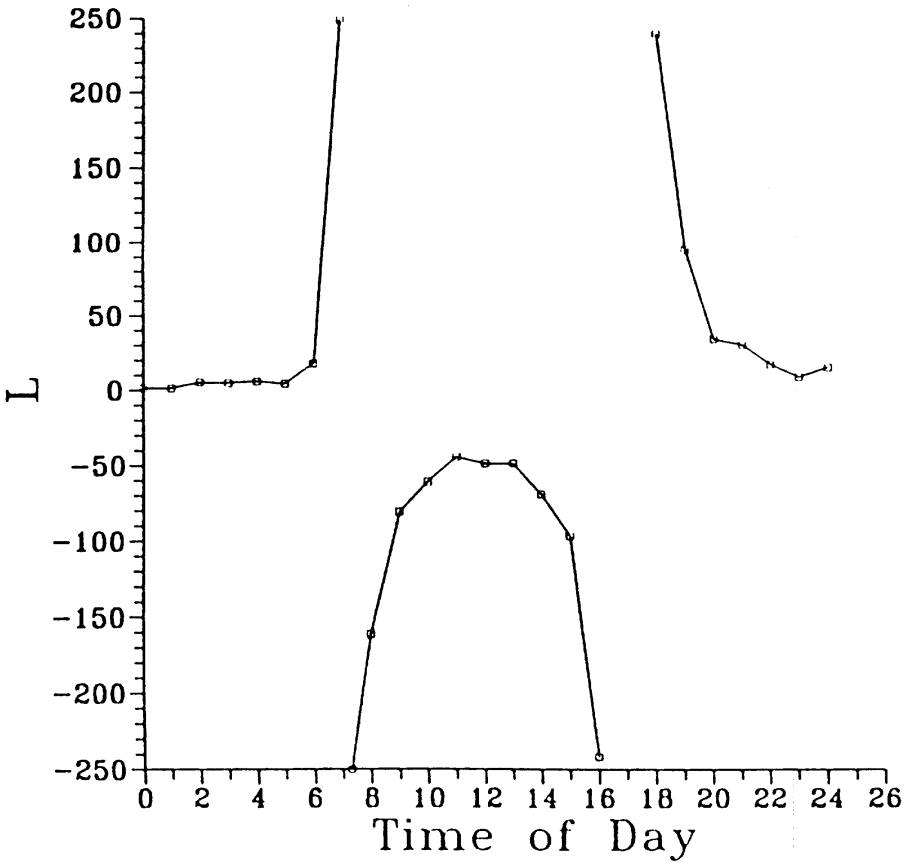

Abbildung 7.7: Monin-Obuchov-Länge nach Tillman et al. (1994)

absorbiert wird, also $(F_\odot + F_{\mathrm{diff}}) \cdot (1 - A)$, wobei $F_\odot$ den direkt von der Sonne einfallenden, F_{diff} den diffusen Fluß und A die Albedo der Oberfläche bezeichnet — als gestrichelte Linie, sowie die Höhe h_{PBL} der turbulenten Grenzschicht als durchgezogene Linie. Man sieht, daß die konvektive Schicht erst mit einiger Verzögerung nach Sonnenaufgang entsteht und wächst und abends relativ rasch wieder zerfällt. Während die obere Grenze der aufsteigenden turbulenten Schicht ziemlich eindeutig bestimmt ist (da wirklich eine relativ scharfe Grenze vorliegt, vgl. die Abbildungen 7.9, 7.11, 7.14), hängen die Details des Abklingens und der nächtliche Verlauf von der genauen Definition von h_{PBL} ab. Ein gewisser Grad an Turbulenz ist in den untersten $100\,\mathrm{m}$ auch in der Nacht vorhanden, wird aber hier nicht erfaßt, da die Tagesturbulenz um Größenordnungen stärker ist.

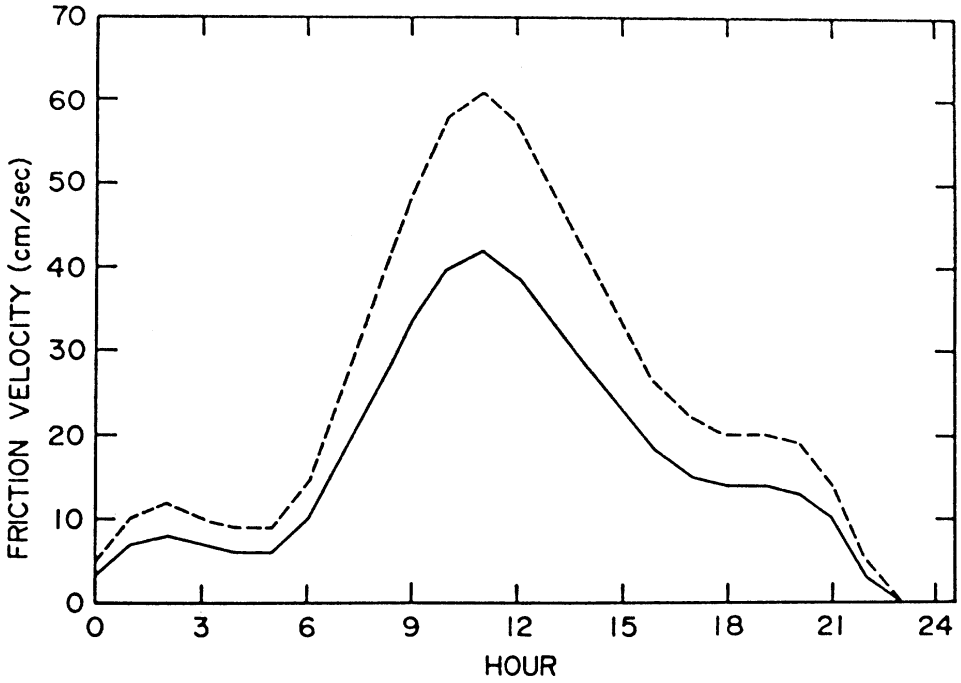

Abbildung 7.8: Reibungsgeschwindigkeit u_* nach Sutton et al. (1978). Durchgezogene Linie: $h_0 = 0.1\,\mathrm{cm}$; gestrichelte Linie: $h_0 = 1\,\mathrm{cm}$.

7.2.3 Die meteorologischen Felder

Die Ausbreitung der turbulent durchmischten Schicht nach oben kann man in Bild 7.9 anhand der zeitlichen Entwicklung des vertikalen Temperaturprofils verfolgen. Da nur die untersten 500 m dargestellt sind, unterscheiden sich Potentialtemperatur θ (linke Hälfte) und Temperatur T (rechte Hälfte) nur unwesentlich, vgl. Abschnitt 2.1. Die durchgezogene Linie zeigt das nächtliche Temperaturprofil, das in Oberflächennähe einen großen positiven Temperaturgradienten zeigt, weswegen die Atmosphäre thermisch sehr stabil geschichtet ist. Um 7:00 Uhr hat sich die Oberfläche bereits auf ungefähr die gleiche Temperatur wie die direkt darüberliegende Atmosphäre erwärmt und auch die Atmosphäre ist insgesamt durch Strahlungseffekte etwas wärmer geworden. Um 8:00 Uhr ist der unterste Teil der Atmosphäre bereits merklich instabil geschichtet und um 9:00 Uhr ist der Temperaturgradient bereits bis etwa $80\,\mathrm{km}$ negativ. Die Atmosphäre ist aber sogar bis ca. $150\,\mathrm{m}$ Höhe turbulent durchmischt (was man an der Abweichung des Temperaturprofils von seinem früheren Pendant ablesen kann). Die

Differenz von ca. $80\,\mathrm{m}$ kommt durch *Überschießen* der Turbulenz zustande; sie führt dazu, daß in der Nähe der oberen Grenze der turbulenten Schicht ein Bereich von gut $50\,\mathrm{m}$ Höhe existiert, in dem die Atmosphäre durch die Konvektion abkühlt, da sie Wärmeaustausch mit den tieferen, kühleren Schichten erfährt.

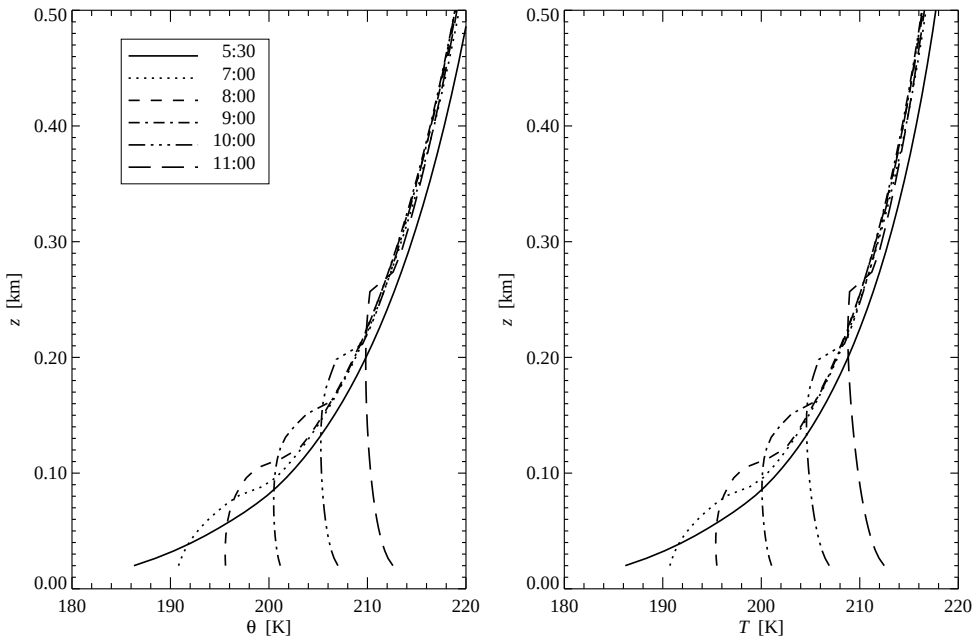

Abbildung 7.9: Vertikale Temperaturprofile am Morgen und Vormittag. Links: Potentialtemperatur; rechts: thermodynamische Temperatur

In Abbildung 7.10 sieht man einige Temperaturprofile in einem größeren Ausschnitt der Atmosphäre. Von besonderem Interesse ist vielleicht das Profil für 17:00 Uhr. Um diese Zeit beginnt die Stabilität in Oberflächennähe bereits wieder umzuschlagen, während der Großteil der Planetaren Grenzschicht immer noch so gut durchmischt ist, daß die Potentialtemperatur einen konstanten Wert hat. Interessanterweise entspricht diesem linearen Verlauf der Potentialtemperatur ein ebensolcher in der thermodynamischen Temperatur, und das selbe gilt sogar noch für den darüberliegenden Bereich bis mindestens $6\,\mathrm{km}$. Wir folgern daraus, daß die Beziehung zwischen θ und T in diesem weiten Temperaturbereich linear ist (vgl. Formel 2.11 in Abschnitt 2.1), auch wenn dies in den untersten hundert Metern der Grenzschicht nicht

mehr unbedingt der Fall ist, da dort die Temperatur die meiste Zeit des Tages sehr stark variiert, was auch zu deutlichen Schwankungen in der Wärmekapazität führt, siehe Abschnitt 2.2.

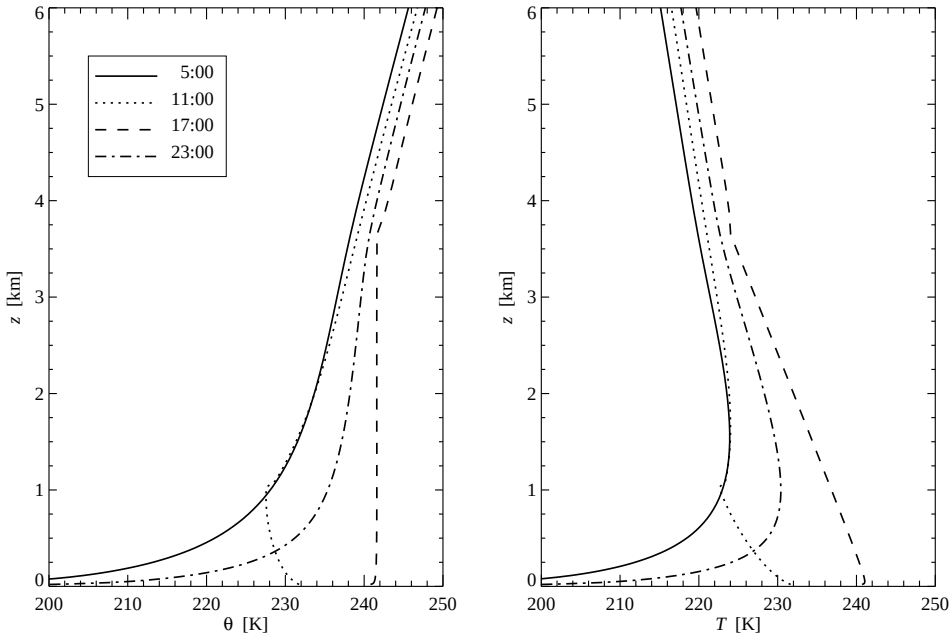

Abbildung 7.10: Vertikale Temperaturprofile zu vier verschiedenen Tageszeiten. Links: Potentialtemperatur θ; rechts: Temperatur T

In einem Probelauf wurde die Wärmekapazität c_p des atmosphärischen Gases konstant gesetzt, anstatt die volle Temperaturabhängigkeit nach Kapitel 2 zu verwenden. Überraschenderweise unterschieden sich die Ergebnisse nur unwesentlich voneinander. Möglicherweise hängt dies damit zusammen, daß die atmosphärische Temperatur sich nur in den untersten $500\,\mathrm{m}$ wirklich stark ändert, und diese Schicht von der darüberliegenden Atmosphäre als Wärmespeicher dominiert wird.

In Abbildung 7.11 sieht man die zeitliche Entwicklung der Profile der horizontalen Windgeschwindigkeitskomponenten u und v. Die höhere Atmosphäre, die oberhalb von etwa $70\,\mathrm{m}$ dynamisch von der Oberfläche abgekoppelt war, wird zunehmend an die untere Randbedingung «erinnert» und abgebremst. Auch hier sieht man den scharfen

oberen Rand der turbulent durchmischten Schicht, die sich nach oben frißt.

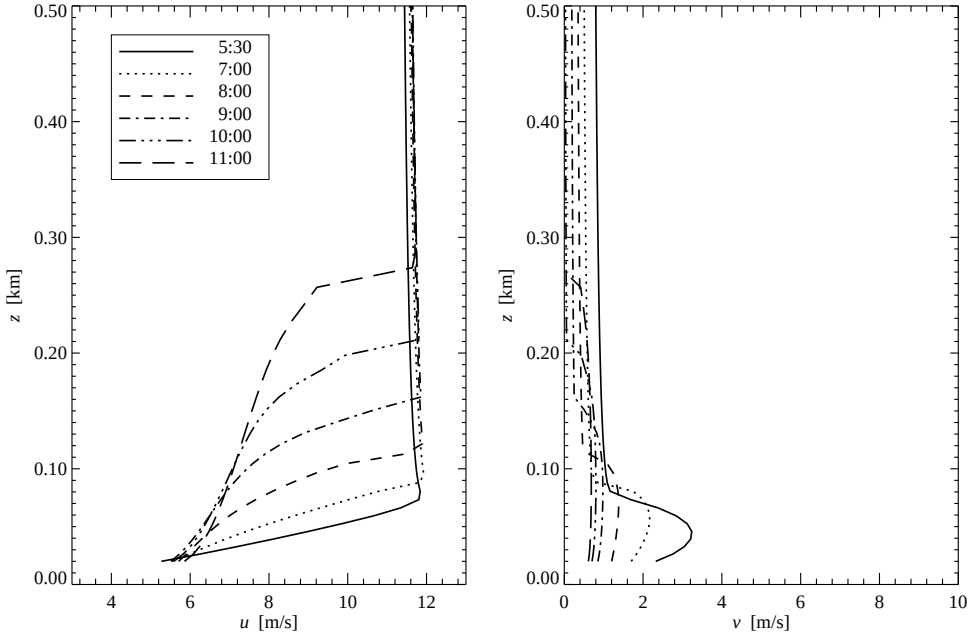

Abbildung 7.11: Vertikale Geschwindigkeitsprofile am Morgen und Vormittag. Links: Westwindkomponente u; rechts: Südwindkomponente v

Potentialtemperatur θ und die Windgeschwindigkeitskomponente u in den untersten 300 Metern der Planetaren Grenzschicht sind in Abbildung 7.12 gezeigt. Man sieht, daß ausgeprägte Strukturen in der Größenordnung von etwa $70\,\mathrm{m}$ auftreten, die bei vernünftiger Modellierung aufgelöst werden müssen. Wollte man den ganzen hier behandelten Höhenbereich von 0 bis $30\,\mathrm{km}$ mit einem äquidistanten Gitter vom Gitterabstand $70\,\mathrm{m}$ abdecken, so benötigte man knapp 430 Gitterpunkte, während mit dem hier benutzten Gitter von 100 Punkten die Auflösung in Oberflächennähe noch um eine Größenordnung besser ist als die genannten $70\,\mathrm{m}$.

7.2.4 Die turbulenten Größen

Abbildung 7.13 zeigt in der linken Graphik die Entwicklung der turbulenten kinetischen Energie, die ein direktes Maß für die Intensität der

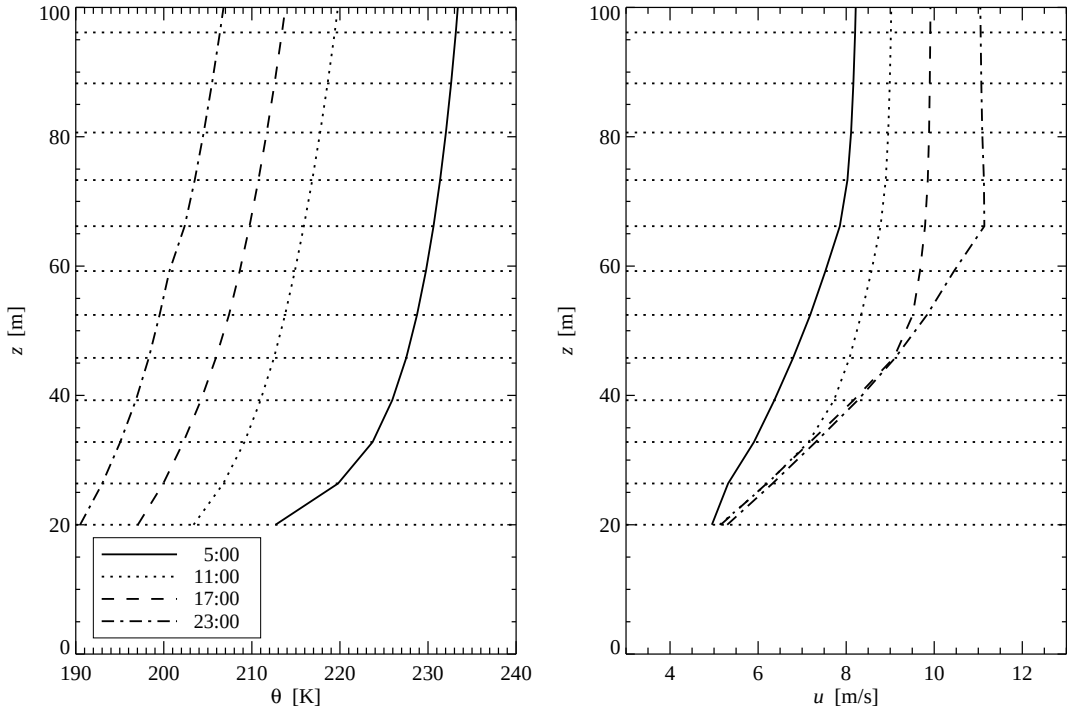

Abbildung 7.12: Temperatur und Windgeschwindigkeit in den untersten $100\,\mathrm{m}$ der Planetaren Grenzschicht zu ausgewählten Zeiten

Turbulenz ist, während des Tages. Man sieht, daß E sein Maximum irgendwo in der Mitte (bei etwa einem Drittel der Gesamthöhe) der turbulenten Schicht annimmt, da in Oberflächennähe die Dissipation hoch ist, während näher zur oberen Grenze Energie in das oben erwähnten Überschießen investiert wird, bei dem die Turbulenz ja Arbeit verrichtet, indem sie Gasvolumina gegen die stabile thermische Schichtung verschiebt. Der Maximalwert von etwa $8\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2$ entspricht umgerechnet in die Wurzel des mittleren Geschwindigkeitsquadrats einer beachtlichen Geschwindigkeit von $4\,\mathrm{m/s}$.

Die Dissipationsrate ε (mittlere Graphik in Abbildung 7.13) steigt zur Oberfläche hin rasch an, da die turbulenten Wirbel dort kleiner werden (im Prinzip können sie nicht größer sein, als ihre Höhe über der Oberfläche) und kleine Wirbel die turbulente kinetische Energie effektiver dissipieren, vgl. Gleichung (4.44).

Der turbulente Diffusionskoeffizient K_u zeigt einen ähnlichen Ver-

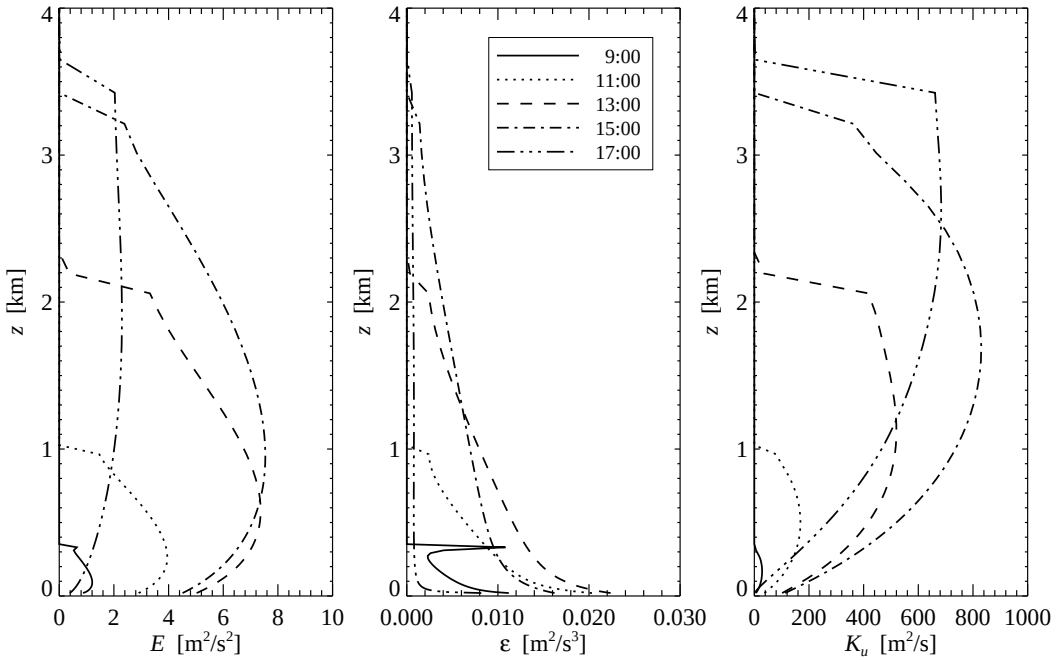

Abbildung 7.13: Entwicklung der vertikalen Profile von turbulenter kinetischer Energie E, Dissipation ε und turbulentem Mischungskoeffizienten K_u.

lauf wie die turbulente kinetische Energie, nimmt allerdings zur Oberfläche hin stark ab, da kleinere Wirbel wesentlich weniger effektiv mischen als die großen in der Mitte der turbulenten Schicht.

Abbildung 7.14 zeigt noch einmal die Entwicklung der turbulenten kinetischen Energie in anderer Darstellung. Man sieht hier sehr schön, wie die konvektive Schicht mit deutlicher Verzögerung nach dem Sonnenaufgang morgens und mittags aufsteigt, nachmittags stagniert und am Abend ohne klar definierten oberen Rand zerfällt. Nachts bildet sich noch eine etwa $100\,\mathrm{m}$ dicke, schwach turbulente Schicht über der Oberfläche heraus, die in der Graphik nicht zu sehen ist, da ihre turbulente kinetische Energie im Vergleich mit den Tageswerten sehr klein ist. Vergleicht man dieses Bild mit Abbildung 4.2, in der die Auftragung allerdings um 12 Stunden verschoben ist, so kann man durchaus von qualitativer Übereinstimmung zwischen den Planetaren Grenzschichten von Erde und Mars sprechen.

Zusammenfassend kann man sagen, daß die Ergebnisse des K-ε-

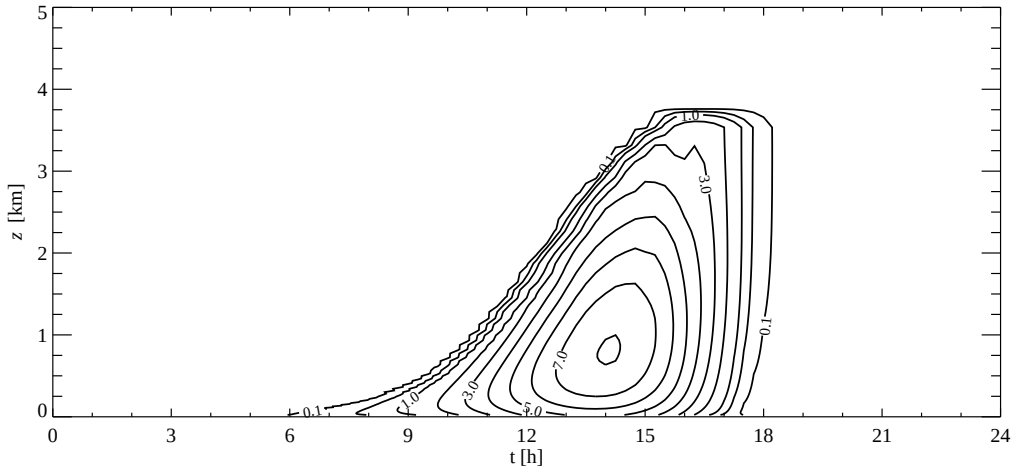

Abbildung 7.14: Zeitliche und räumliche Entwicklung der turbulenten kinetischen Energie E im Verlauf eines Marstages. Eingezeichnet sind Isolinien für E, die Zahlen sind in Einheiten $\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2$

Modells für die Planetare Grenzschicht zufriedenstellend mit den oft nicht sehr klaren Messungen übereinstimmen und sich gut mit den Resultaten von Modellen decken, die eine andere Turbulenzparametrisierung benutzen. In vielen qualitativen Zügen ist die Planetare Grenzschicht des Mars der irdischen sehr ähnlich, allerdings unterscheiden sich die Skalen der entsprechenden Variablen beträchtlich, was durch die Unterschiede in Dichte, Zusammensetzung und Sonneneinstrahlung bedingt ist.

Kapitel 8

Ergebnisse
II. Verhalten des Staubes

8.1 Das Modell

In das im letzten Kapitel beschriebene K-ε-Modell der Planetaren Grenzschicht des Mars wurden nun verschiedene Staubpopulationen eingesetzt, um deren Sedimentationsverhalten unter dem Einfluß der die unteren Kilometer der Atmosphäre erfassenden Konvektion zu untersuchen. Als Startkonfiguration wurde eine $30\,\mathrm{km}$ dicke Schicht mit homogener Verteilung des Staubes gewählt, über der die Atmosphäre staubfrei ist. Das deckt sich zum Teil mit den Beobachtungen, wonach Staub — zumindest während und nach Staubstürmen — bis in mindestens diese Höhe ein konstantes Mischungsverhältnis q hat. In manchen Fällen wurde Staub sogar in einer Höhe von $50\,\mathrm{km}$ nachgewiesen, da sich aber oberhalb der hier gewählten Grenze von $30\,\mathrm{km}$ ohnehin nur etwa 5 % der atmosphärischen Gesamtmasse befinden und außerdem die Fallzeit für große Höhen kaum noch anwächst (vgl. Abbildung 6.2), die höchsten Schichten also als Staubreservoir recht ineffektiv sind, sollte die hier gemachte Annahme zu realistischen Resultaten führen.

Die Ergebnisse aus Kapitel 7 belegen, daß man (zumindest an der Landestelle von *Viking 1*) aus der Annahme stabiler Wetterlage über gleichförmigem, ebenem Terrain durchaus realistische Ergebnisse erhält. Wenn wir über Tage hinweg die Entwicklung des Staubes

berechnen wollen, müssen wir umso mehr horizontale Homogenität fordern, da seitliche Advektion des Staubes die Ergebnisse in Frage stellen würde. Auf der anderen Seite ändert horizontale Advektion nur dann etwas am Gesamtbild, wenn sie zwischen Gebieten erfolgt, die sich stark voneinander unterscheiden. Es ist klar, daß das vorliegende Modell in der Nähe von Kratern, die als langfristige Staubsenken vielleicht eine bedeutende Rolle spielen, so wenig angewandt werden kann, wie in unebenem oder gar bergigem Gebiet. Auch hängt die Höhe der Planetaren Grenzschicht stark von Parametern wie der areographischen Länge oder der Thermischen Trägheit ab, so daß die vorliegenden Ergebnisse nur Beispielcharakter haben und eine gewisse Vorstellung von einzelnen Prozessen vermitteln sollen, die unter veränderten Bedingungen durchaus eine deutlich andere Ausprägung haben können.

In diesem Kapitel treten ausschließlich auf den Anfangszustand normierte Werte des Staub-Mischungsverhältnisses q auf. Die Aussage $q = 0.9$ hat hier also nicht die apokalyptische Bedeutung, daß die Atmosphäre zu 90 Masseprozent aus Staub und zu 10 % aus Gas besteht, sondern drückt den schlichteren Umstand aus, daß der Staubgehalt auf 90 % des Startwertes gesunken ist. Absolutwerte des Staubgehalts (q wird nie größer als etwa 10^{-4}) spielen selten eine direkte Rolle und interessieren in der Mehrzahl der Fälle bestenfalls als Möglichkeit, die optische Dicke bzw. den Extinktionskoeffizienten k abzuschätzen.

Koagulation der Staubpartikel, wie sie in Staubstürmen vielleicht bedeutsam sein kann (Rossow, 1978), spielt bei den hier interessierenden Staubdichten keine Rolle, da die Koagulationszeit viel größer ist als die anderen relevanten Zeitskalen (siehe etwa Chassefière et al., 1995).

8.2 Die Dynamik der einzelnen Staubpopulationen

Es wurden fünf Staubpopulationen mit den Teilchenradien

$$r_i \in \{0.080, 0.43, 1.1, 2.1, 3.8\}\ \mu\mathrm{m} \tag{8.1}$$

betrachtet.

Als Anfangsbedingung zur Zeit $t = 0$ wurde die «Staubigkeit» q_i für jede der fünf Teilchensorten in der ganzen Schicht auf einen konstanten Wert gesetzt, so daß die normierten Werte von q_i in allen Höhen mit dem Wert 1 starten — mit Ausnahme des obersten, bei $z = 30.0\,\mathrm{km}$ gelegenen Niveaus, wo $q_i = 0$ gesetzt wurde. Letzteres geschah, um Staubeintrag aus höhergelegenen, im Modell nicht erfaßten Schichten zu verhindern und stellt auch gleichzeitig die obere Randbedingung für die Variablen q_i dar.

8.2.1 Modelle ohne zusätzliche Diffusivität

Die Abbildungen 8.1 bis 8.4 zeigen die Entwicklung der «Staubigkeits»-Profile $q_i(z)$ im Verlauf der ersten 4 Tage. Die Rechnung beginnt um 0:00 Uhr lokaler Zeit, und 5 Stunden später besitzen alle Populationen praktisch immer noch die Anfangskonzentration. Um 11:00 Uhr hat die turbulente Grenzschicht den ersten Kilometer der Atmosphäre erfaßt und in diesem die Konzentration des Staubes durch diffusiven Transport zur Oberfläche merklich verringert. Die Teilchenkonzentrationen zeichnen sehr deutlich den oberen Rand der turbulenten Schicht nach, da die Turbulenz in ihrem Wirkungsbereichbereich die Konzentrationen sehr rasch an den niedrigeren Wert angleicht. Dabei sind, wie auch noch um 17:00 Uhr, praktisch keine Unterschiede zwischen den verschieden großen Teilchen festzustellen, da die turbulente «Mischungsgeschwindigkeit» $K_d/h_{\mathrm{PBL}} \approx 0.15\,\mathrm{m/s}$ in der Grenzschicht höher ist, als die Sinkgeschwindigkeiten der Teilchen im unteren Teil der Atmosphäre. Während der Nacht verschiebt sich nun die am oberen Rand der Planetaren Grenzschicht entstandene Kante in den Staubkonzentrationen nach unten, was naturgemäß für die größten Teilchen schneller vor sich geht als für die kleineren. Um 11:00 am zweiten Tag frißt sich die turbulente Schicht von neuem in die untersten Kilometer, die noch von der letzten Nacht defizitär an Staub sind, so daß die Konzentration jetzt noch weiter sinkt. Um 23:00, also praktisch nach zwei Tagen, ist die Konzentration der kleinsten Staubteilchen, die nur in geringem Umfang aus der höheren Atmosphäre nachsinken, in den untersten $4\,\mathrm{km}$ bereits auf 0.6 gesunken.

Die größeren Teilchen können die tagsüber erlittenen Verluste

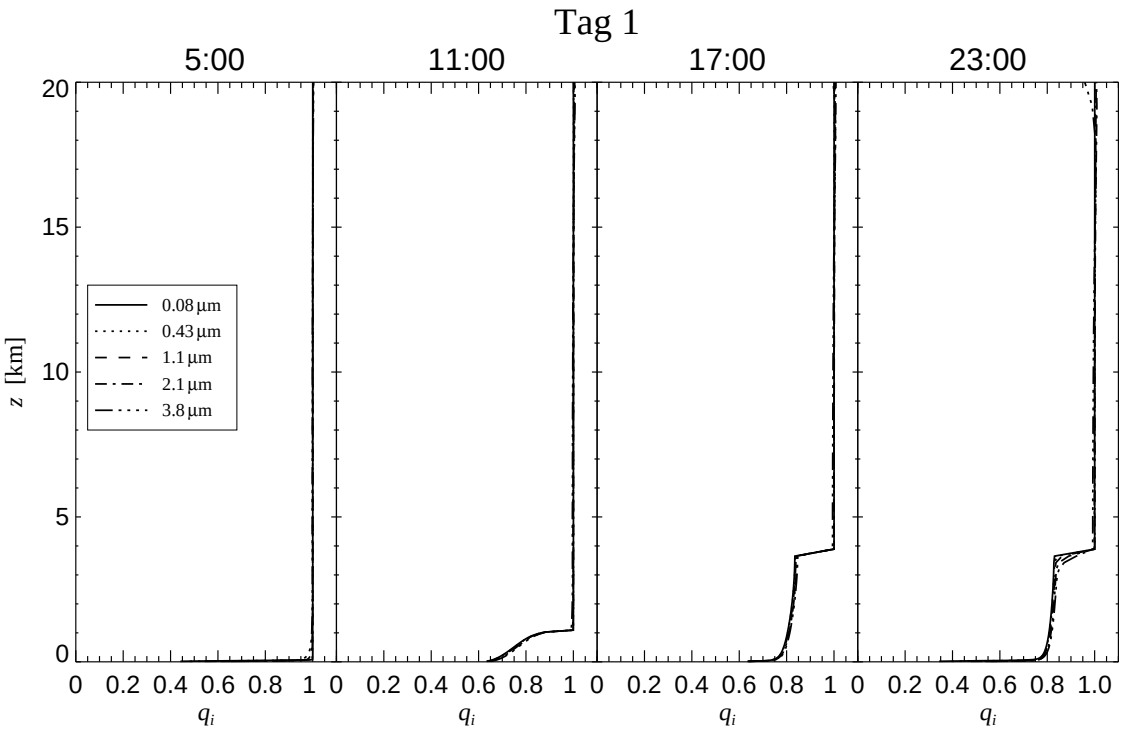

Abbildung 8.1: Entwicklung der Profile des Staub-Mischungsverhältnisses q während des ersten Tages der Simulation

eher ausgleichen, was aber auf Kosten der Staubkonzentration in den höheren Schichten geht. Das zeigt sich darin, daß im Verlauf des zweiten Tages die obere Grenze der Schicht mit den Teilchen vom Radius $5\,\mu\mathrm{m}$ im Bereich 15–$20\,\mathrm{km}$ sichtbar wird. Im Laufe des dritten und vierten Tages geschieht das gleiche mit der Population $r = 2\,\mu\mathrm{m}$, während die kleineren Teilchen ihren Vorrat weniger schnell aufbrauchen, dafür aber auch in der Planetaren Grenzschicht gegenüber ihren größeren Geschwistern deutlich abgereichert sind.

Auffallend ist in den Abbildungen 8.1 bis 8.4, daß die q-Profile sich durch die im wesentlichen diffusionsfreie Atmosphäre oberhalb $4\,\mathrm{km}$ praktisch unverändert hinunterschieben. Dieses Verhalten würde man von einer reinen Advektionsgleichung der Art

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -w_{\mathrm{sink}} \frac{\partial q}{\partial z} \tag{8.2}$$

erwarten, während der zusätzliche Term $q/\varrho \cdot \partial(\varrho w_{\mathrm{sink}})/\partial z$ in (6.20) — wie man naiv annehmen könnte — zu einer Reduktion der Staub-

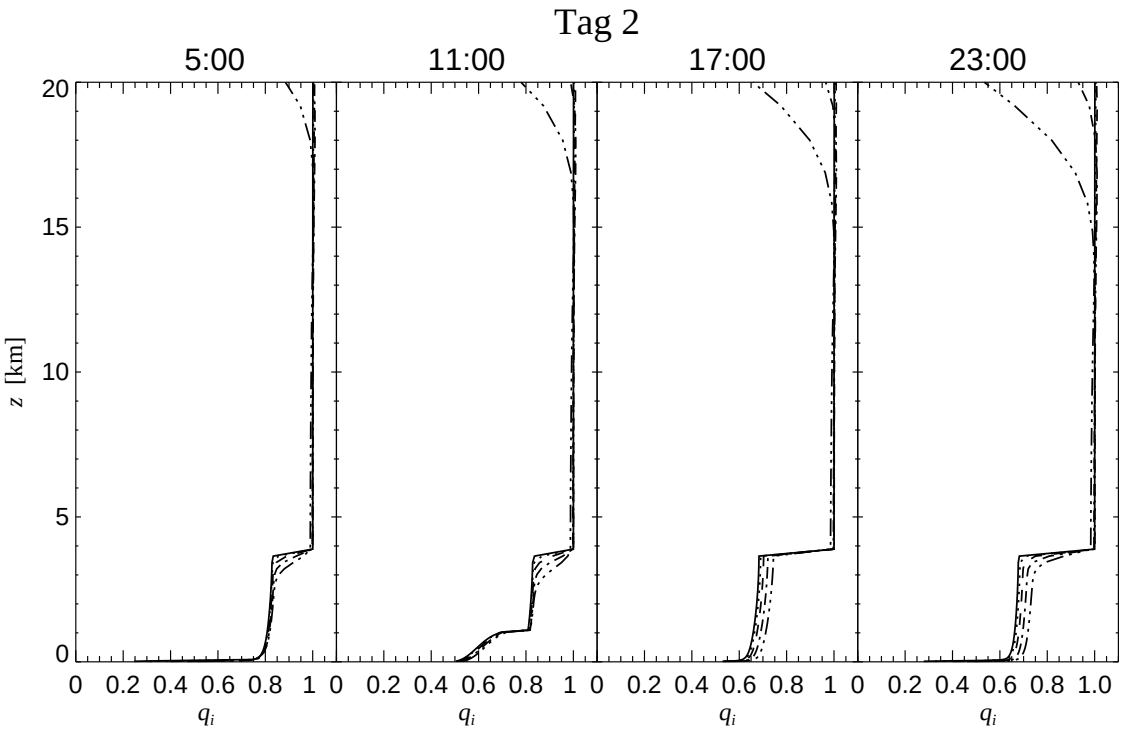

Abbildung 8.2: Wie Abbildung 8.1, aber für den zweiten Tag der Simulation

konzentration führen sollte, denn er beinhaltet ja die Verringerung der relativen Bedeutung einer Staubmenge, die in tiefere Atmosphärenschichten absinkt und es in dem dichteren Gas nur zu einem geringeren Mischungsverhältnis bringt. In voller Übereinstimmung mit diesem Argument verhalten sich denn auch Modelle mit konstanter Fallgeschwindigkeit.

Im hier untersuchten Fall (Abbildungen 8.1–8.4) aber variiert w_{sink} ebenfalls stark mit der Höhe, und Abbildung 6.1 zeigt, daß die Bewegung von Teilchen der betrachteten Größe bereits im Bereich hoher Knudsen-Zahlen erfolgt, wo w_{sink} exponentiell wächst. Genauer gilt für die Sinkgeschwindigkeit für $\mathrm{Kn} \gg 1$ nach (6.6) die Proportionalität

$$w_{\mathrm{sink}} \sim \frac{g \varrho_{\mathrm{d}} r}{\eta} l_{\mathrm{f}} \ , \tag{8.3}$$

wobei die Mittlere Freie Weglänge l_{f} der Gasmoleküle gemäß

$$l_{\mathrm{f}} \simeq \frac{m}{\sigma \varrho} \tag{8.4}$$

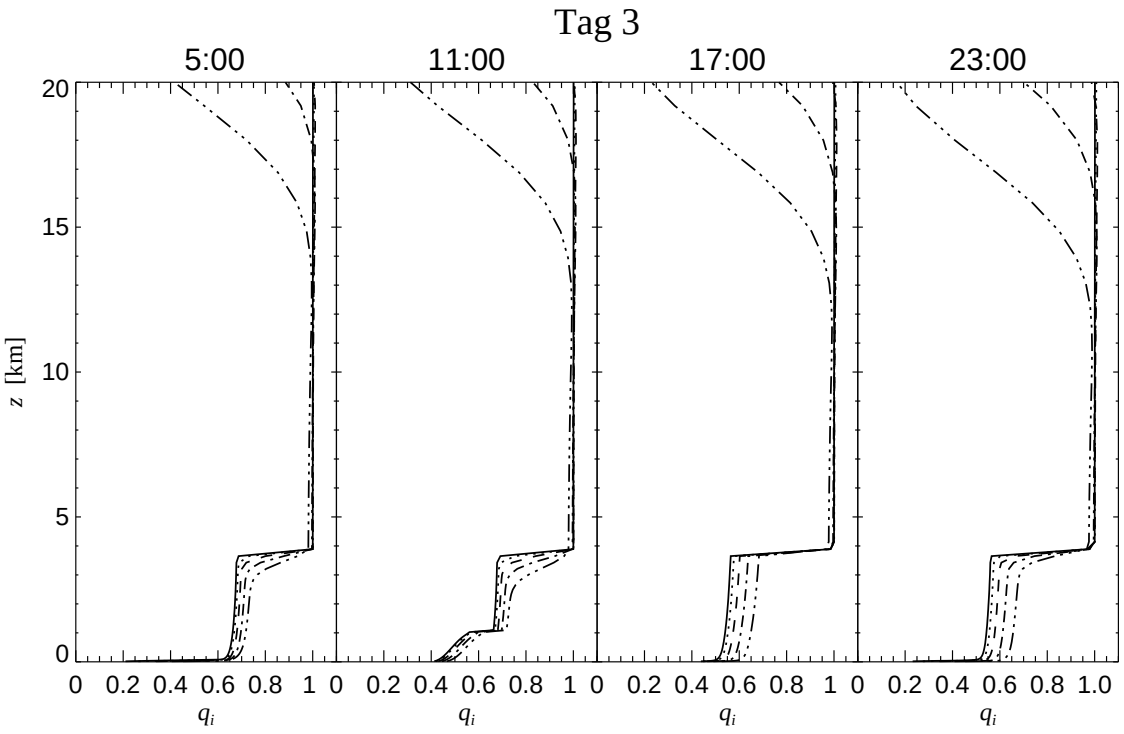

Abbildung 8.3: Wie Abbildung 8.1, aber für den dritten Tag

durch die Molekülmasse m, den molekularen Stoßquerschnitt σ und die Gasdichte ϱ ausgedrückt werden kann. Berücksichtigt man den Umstand, daß η in guter Näherung nicht vom Druck und nur relativ schwach von der Temperatur abhängt (die ohnehin viel weniger variiert, als Druck und Dichte über einige Skalenhöhen), so erhält man schließlich den Zusammenhang

$$w_{\mathrm{sink}} \sim \frac{1}{\varrho} \,, \tag{8.5}$$

da alle anderen involvierten Größen konstant sind, oder nur schwach variieren. Aus (8.5) ist sofort ersichtlich, daß

$$\frac{q}{\varrho} \frac{\partial(\varrho w_{\mathrm{sink}})}{\partial z} \approx 0 \tag{8.6}$$

ist, womit die Transportgleichung für den Staub wirklich den Typ (8.2) annimmt. Zusammenfassend kann man sagen, daß der Bedeutungsverlust des Staubes beim Absinken in dichtere Atmosphärenschichten (re-

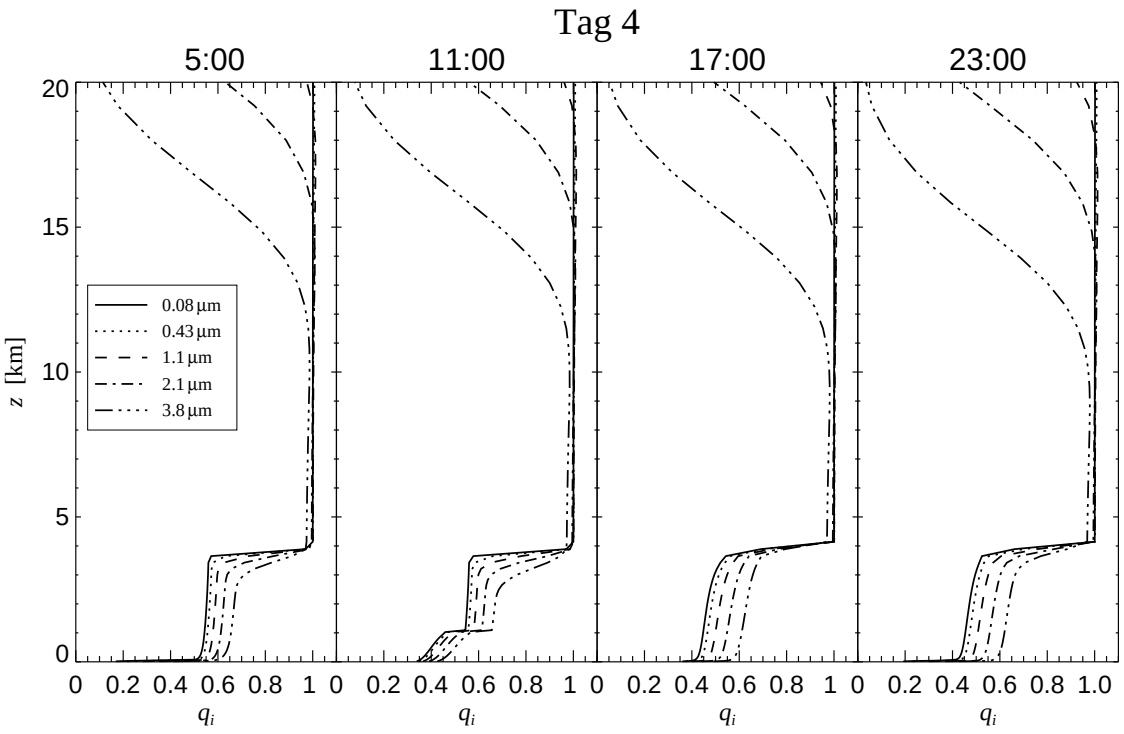

Abbildung 8.4: Wie Abbildung 8.1, aber für den vierten Tag

präsentiert durch den Term $w_{\mathrm{sink}} \partial \varrho / \partial z$) von der gleichzeitigen Abnahme der Sinkgeschwindigkeit und der damit verknüpften Akkumulation des Staubes (den Term $\varrho \, \partial w_{\mathrm{sink}} / \partial z$) kompensiert wird.

In Abbildung 8.5 ist die zeitliche Entwicklung der «Staubigkeit» q für vier verschiedene Höhen aufgetragen. Im Niveau $z = 15\,\mathrm{km}$ (Bild 8.5a) sinkt die Teilchenkonzentration in dem Maße, in dem es vom oberen Rand der Staubverteilung erreicht wird, der zum Zeitpunkt $t = 0$ bei etwa $30\,\mathrm{km}$ aufgeprägt wurde. Dabei gehen die großen Teilchen den kleineren voran, und in $5\,\mathrm{km}$ Höhe (Bild 8.5b), also noch einen Kilometer über der Planetaren Grenzschicht, macht sich der Einfluß des oberen Randes der Verteilung innerhalb der dargestellten zehn Tage nur bei den Teilchen vom Radius $r = 3.8\,\mu\mathrm{m}$ bemerkbar. In beiden Fällen sieht man nichts vom Tagesgang der Atmosphäre, da dieser sich im wesentlichen auf die Planetare Grenzschicht beschränkt.

Bei $z = 2.3\,\mathrm{km}$ (Bild 8.5c) befinden wir uns bereits mitten in der Grenzschicht. Jeweils um 12:30 Uhr, wenn die turbulente Schicht das

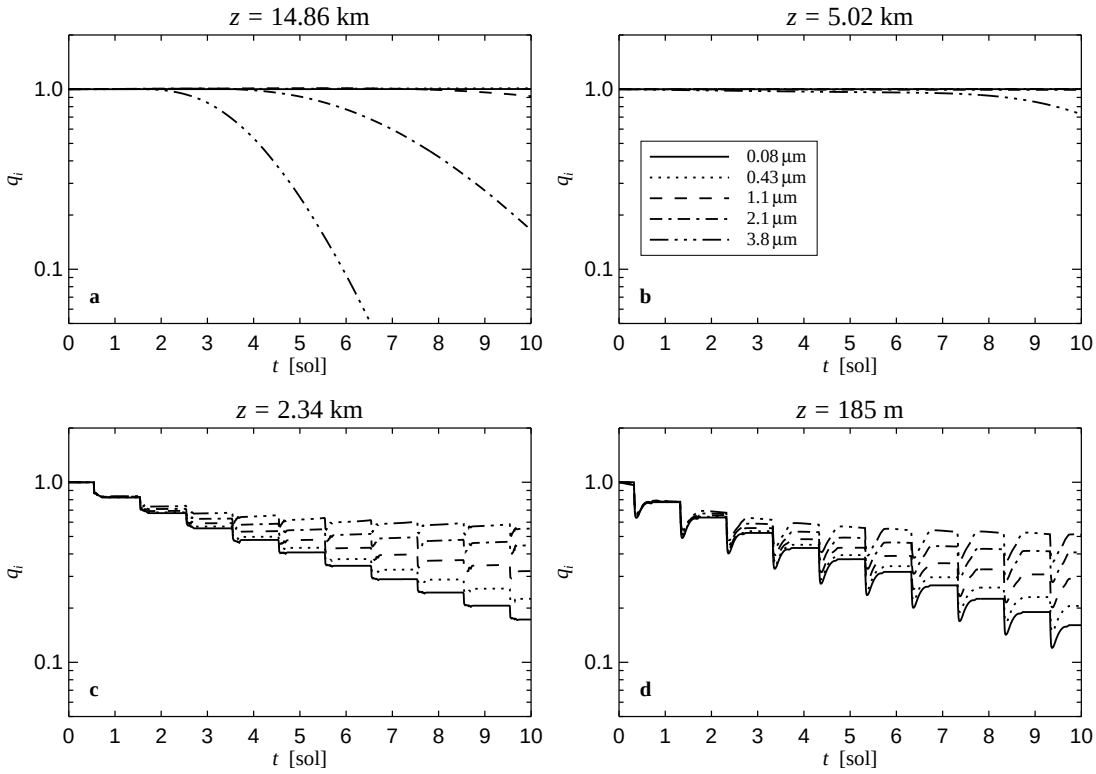

Abbildung 8.5: Zeitliche Entwicklung von q in vier ausgewählten Niveaus

betrachtete Niveau erreicht, sinkt die Staubkonzentration fast schlagartig ab, da ein intensiver Austausch mit den deutlich abgereicherten tieferliegenden Schichten einsetzt. Anschließend steigt die Staubkonzentration wieder etwas an, da die Konvektion nun die darüberliegende Schicht erfaßt hat und von dort Staub herabtransportiert. Bei den großen Teilchen sieht man auch nachts einen gewissen Anstieg der Teilchenkonzentration, der durch das «Nachrieseln» von Staub aus höheren, nicht von der Turbulenz betroffenen Schichten bedingt ist. In $185\,\mathrm{m}$ Höhe (Bild 8.5d) finden wir ungefähr das gleiche Verhalten vor, wobei aber die Abnahme der «Staubigkeit» am Vormittag viele ausgeprägter ist, da hier durch die kleine Distanz die Verbindung zur Staubsenke bei $z = 0$ wesentlich intensiver ist als im vorigen Bild.

Man erkennt in den Bildern 8.5c und 8.5d, daß die Konzentration der kleineren Teilchen in der Planetaren Grenzschicht mittelfristig exponentiell abklingt, was leicht zu verstehen ist, da sie keinen nennenswerten Nachschub aus höheren Schichten erfahren und die Planetare

Grenzschicht jeden Tag einen festen Prozentsatz p an Teilchen zum Sedimentieren bringt; aus der Steigung der Kurven in den beiden Graphiken erhält man einen Wert von $p \approx 20\,\%$ für die tägliche Verlustrate.

Als ein zentrales Ergebnis halten wir fest, daß Staub aller Teilchengrößen in der Planetaren Grenzschicht im Vergleich zu den darüberliegenden Schichten schon nach wenigen Tagen stark abgereichert ist.

In Abbildung 8.6 ist die zeitliche Abhängigkeit der Säulendichte des Staubs in der gesamten Atmosphäre

$$m_{\mathrm{d}} = \int_0^\infty \varrho q \, dz \tag{8.7}$$

für die fünf Teilchenpolulationen dargestellt, wobei auf den jeweiligen Anfangswert $m_{\mathrm{d}}(t=0)$ normiert wurde. Man sieht, daß die großen Teilchen rasch zur Neige gehen, und die Population mit $r = 3.8\,\mu\mathrm{m}$ nach 15 Tagen praktisch nicht mehr vorhanden ist.

Für die ganz kleinen Teilchen nimmt m_{d} einen quasi-stationären Wert an, der dadurch zustandekommt, daß die Planetare Grenzschicht der Höhe $h_{\mathrm{PBL}} \approx 4\,\mathrm{km}$ praktisch leergefegt ist, in der darüberliegenden freien Atmosphäre das Aerosol aber aufgrund der geringen Sinkgeschwindigkeit nicht merklich weniger wird, so daß die Menge

$$m_{\mathrm{d,res}} = \int_{h_{\mathrm{PBL}}}^\infty \varrho q \, dz \tag{8.8}$$

in der Atmosphäre verbleibt, für die sich bei einer Skalenhöhe $H_{\mathrm{Skal}} \approx 11\,\mathrm{km}$ und anfangs homogener Staubverteilung leicht die Abschätzung

$$m_{\mathrm{d,res}} = e^{-\frac{h_{\mathrm{PBL}}}{H_{\mathrm{Skal}}}} \approx 0.7 \tag{8.9}$$

erhalten läßt, die auch ausgezeichnet mit dem Plateau in Abbildung 8.6 übereinstimmt.

Die Staubmenge (8.8) charakterisiert keinen wirklich stabilen Endzustand, da auf lange Sicht auch die kleinen Teilchen schließlich ausfallen werden. Wie die Kurven für $r = 1.1\,\mu\mathrm{m}$ und $r = 2.1\,\mu\mathrm{m}$ zeigen, geschieht diese längerfristige Abnahme in linearer Zeitabhängigkeit, da

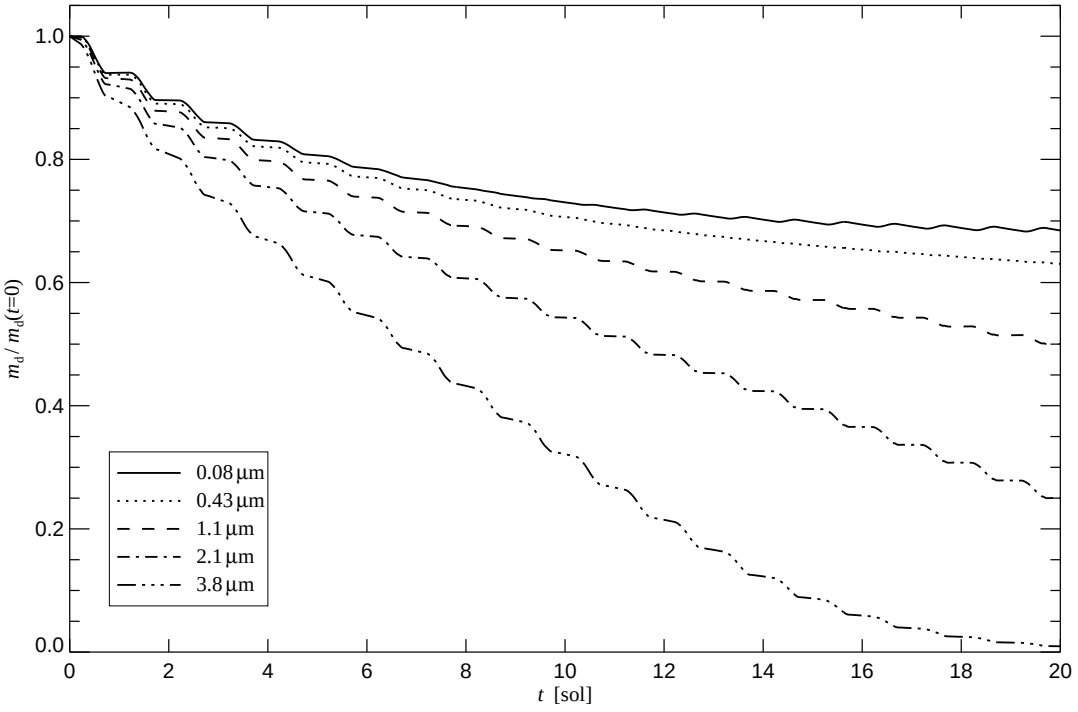

Abbildung 8.6: Gesamte Staubmenge m_d in der Atmosphäre für die fünf Teilchenpopulationen (jeweils auf den Anfangswert normiert) als Funktion der Zeit

der in der Höhe h_PBL in die Planetare Grenzschicht sinkende Staub die feste Geschwindigkeit $w_\mathrm{sink}(h_\mathrm{PBL})$ und ein festes Mischungsverhältnis $q \approx 1$ hat (siehe auch Abbildungen 8.1 bis 8.4), und somit jeden Tag die feste Menge

$$\varrho\, q\, |w_\mathrm{sink}(h_\mathrm{PBL})| \tag{8.10}$$

an Staub die Planetare Grenzschicht von oben erreicht und unten auch ausfällt.

8.2.2 Modelle mit zusätzlicher Diffusivität

In den Abbildungen 8.7 und 8.8 ist das Ergebnis einer Vergleichsrechnung gezeigt, bei der zum turbulenten Diffusionskoeffizienten K_q der räumlich und zeitlich konstante Wert $K_\mathrm{bg} = 10\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$ addiert wurde, ohne das meteorologische Hintergrundmodell zu ändern. Diese Rechnung erfolgt in Anlehnung an Conrath (1975), der versucht, die in der Ab-

klingphase von großen Staubstürmen beobachtete Konstanz der Teilchengrößenverteilung mit einer turbulenten Diffusivität K zwischen $10\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$ und $1\,000\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$ zu erklären.

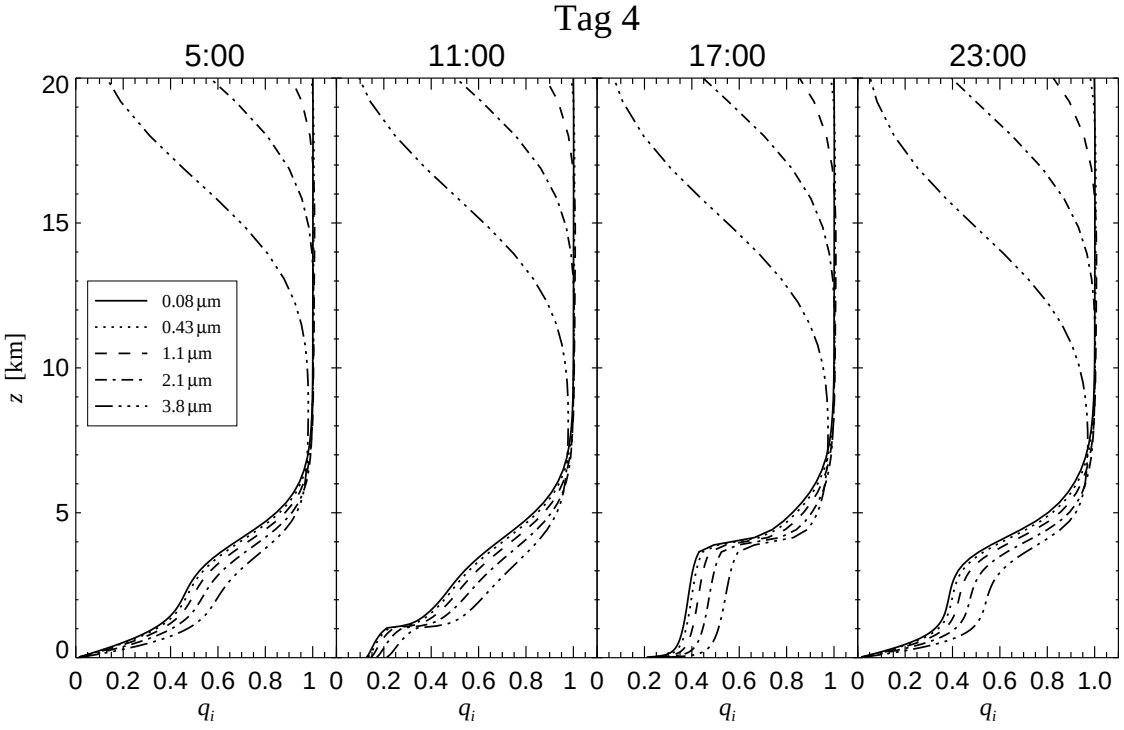

Abbildung 8.7: Vertikale Profile des Staub-Mischungsverhältnisses q für die fünf Teilchenpopulationen in einem Szenario mit zusätzlichem Diffusionskoeffizenten $K_q = 10\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$

Ähnlich argumentieren Chassefière et al. (1992; 1995), um die aus *Phobos*-Messungen in der ruhigen Jahreszeit $L_\mathrm{s} = 0^\circ$–20° gefolgerte annähernde zeitliche Konstanz von Staub-Mischungsverhältnis q und Größenverteilung, sowie die relativ geringe Größenverschiebung mit der Höhe zu erklären.

Die Rechnung erfolgte wieder mit den Populationen (8.1). Abbildung 8.7 zeigt die vertikalen Profile des Mischungsverhältnisses q für den vierten Tag (vgl. Abbildung 8.4). Man sieht, daß im Vergleich zum Modell ohne zusätzliche Mischung alle scharfen Strukturen geglättet sind, wie man das von einer global wirkenden Diffusivität erwarten kann. Abgesehen von diesem «Weichzeichnereffekt» hat sich an der vertikalen Struktur der Staubverteilung wenig geändert, lediglich in Bodennähe

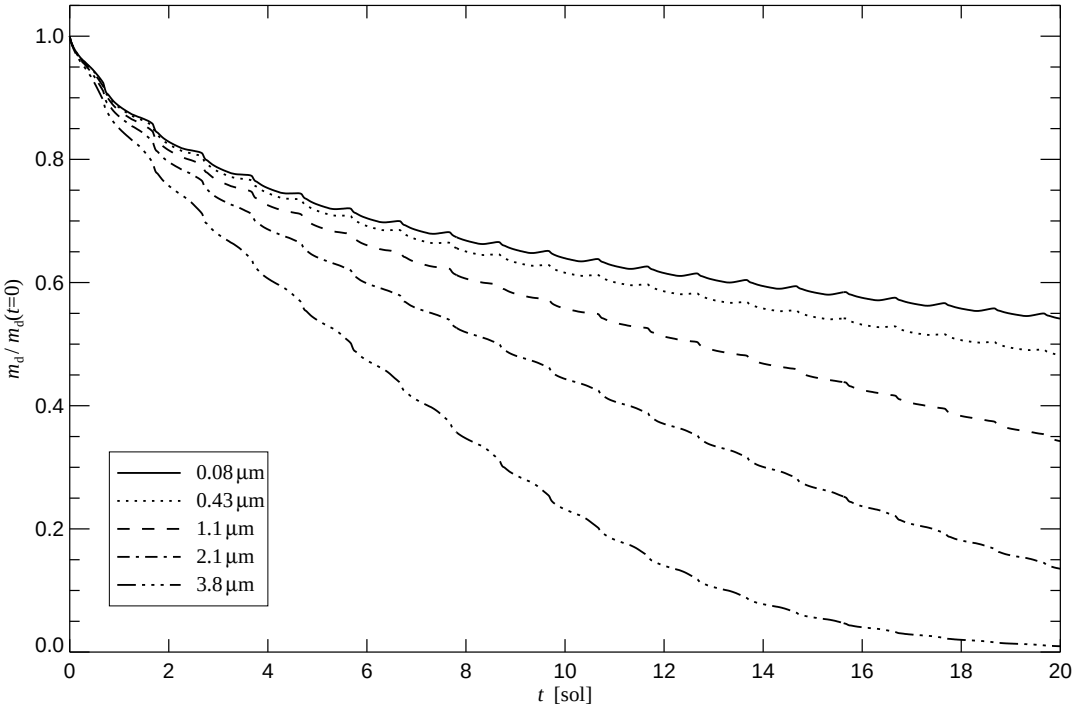

Abbildung 8.8: Gesamte Staubmenge m_d in der Atmosphäre für die fünf Teilchenpopulationen bei zusätzlichem Diffusionskoeffizenten $K_\mathrm{bg} = 10\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$

ist die Teilchenkonzentration nachts stark abgesenkt, da die Oberfläche dank der beständig wirkenden Mischung nun auch nachts Staub absorbieren kann.

Abbildung 8.8 zeigt den zeitlichen Verlauf der Säulendichte m_d für die einzelnen Populationen. Der Vergleich mit 8.6 zeigt wenig Neues, die Staubmenge nimmt für alle Teilchengrößen etwas schneller ab, da nun auch nachts Staub zur Oberfläche gemischt wird, die Änderung ist aber recht bescheiden, da die Reichweite dieser diffusiven Effekte auf einen Bruchteil der Skalenhöhe beschränkt ist.

Die analoge Rechnung mit einem zusätzlichen Diffusionskoeffizienten von $100\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$ (dem von Chassefière et al., 1995, propagierten Wert) zeigt wesentlich drastischere Veränderungen. Die in Abbildung 8.9 dargestellten Höhenprofile für den vierten Tag weisen deutlich reduzierte Werte der «Staubigkeit» q in allen Höhenbereichen auf — außer für die

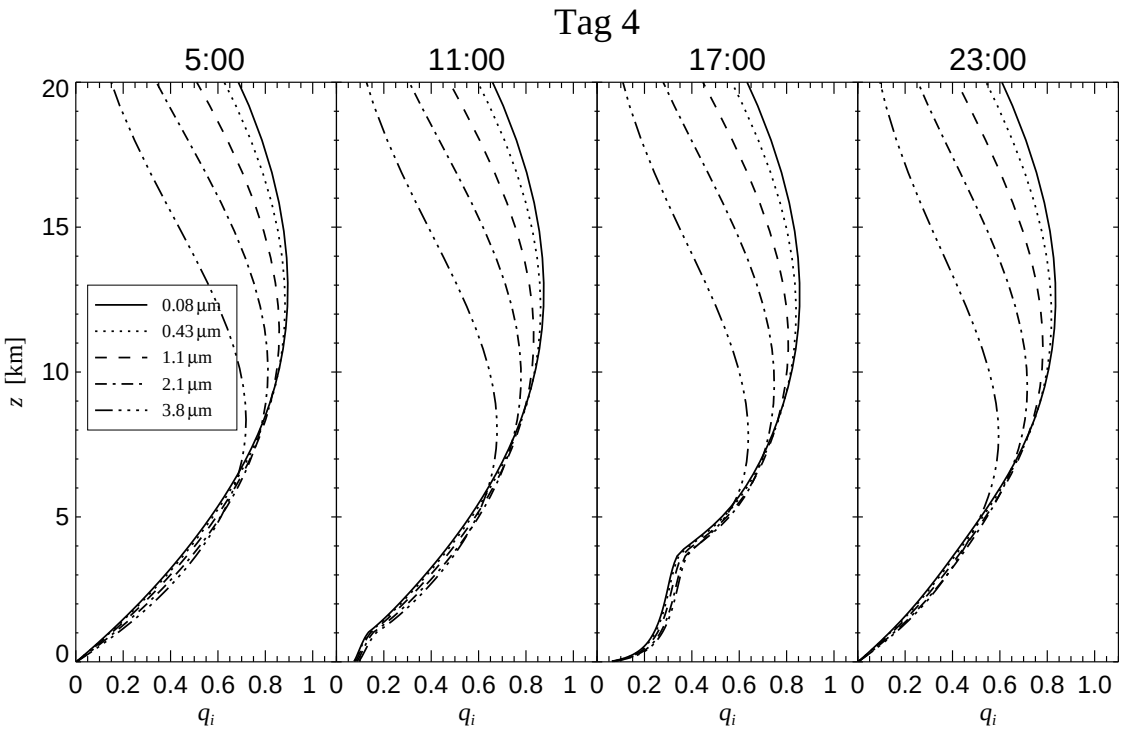

Abbildung 8.9: Vertikale Profile des Staub-Mischungsverhältnisses q für die fünf Teilchenpopulationen in einem Szenario mit zusätzlichem Diffusionskoeffizenten $K_q = 100\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$

größten Teilchen, die oberhalb von etwa $17\,\mathrm{km}$ nun ein wenig angereichert sind.

Sehr deutlich ist die globale Abreicherung auch in Abbildung 8.10 zu sehen. Die Zeitkonstante für das (in guter Näherung exponentielle) Abklingen der Säulendichte m_d variiert zwischen $1.7\,\mathrm{d}$ für $r = 3.8\,\mu\mathrm{m}$ und knapp $10\,\mathrm{d}$ für $r = 0.08\,\mu\mathrm{m}$, was auf jeden Fall sehr kurz ist — die Zeitkonstanten für den Zerfall von großen Staubstürmen etwa liegen im Bereich von $\approx 100\,\mathrm{d}$, vgl. Zurek (1982).

Wir halten fest, daß das Einführen einer konstanten «Hintergrunddiffusivität» in erster Linie die Sedimentation des Staubes beschleunigt. Da dieser Effekt relativ unabhängig von der Teilchengröße ist, gleichen sich die Konzentrationen der verschiedenen Populationen aneinander an. Eine deutliche Angleichung in der oberen Schichten ergibt sich nur im Modell mit $100\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$ Hintergrunddiffusivität, das aber un-

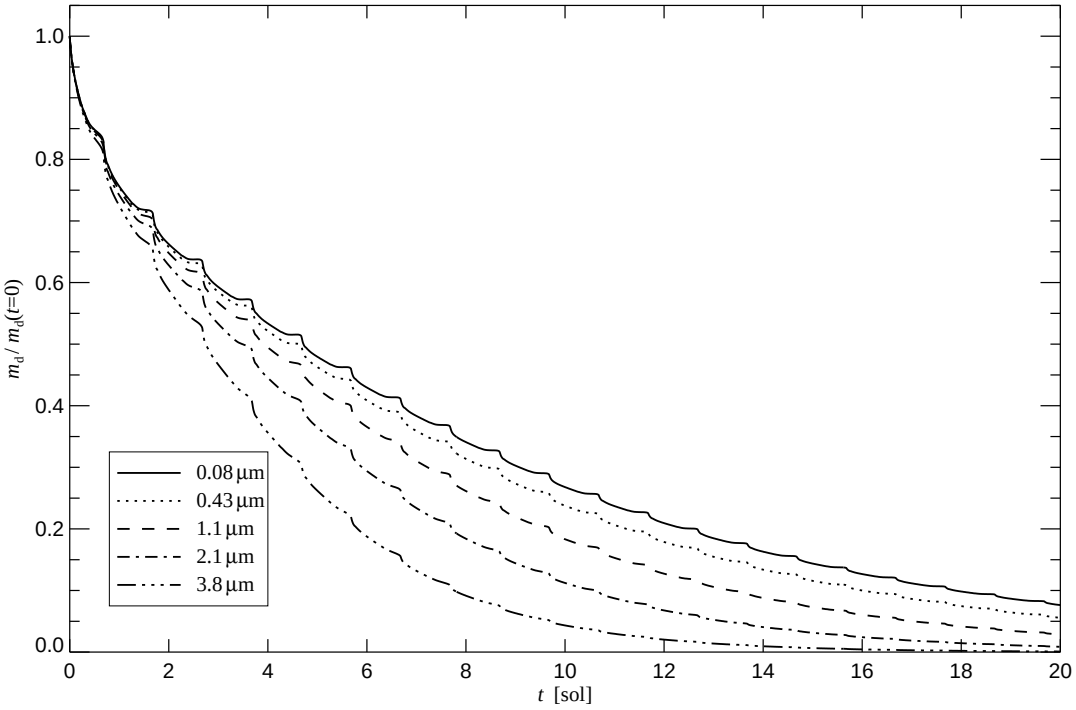

Abbildung 8.10: Gesamte Staubmenge m_d in der Atmosphäre für die fünf Teilchenpopulationen bei zusätzlichem Diffusionskoeffizenten $K_\mathrm{bg} = 100\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$

realistisch kurze Sedimentationszeiten zeigt.

8.3 Die Entwicklung und Höhenabhängigkeit der Größenverteilung

Um die Veränderungen in der Größenverteilung des atmosphärischen Staubes aufgrund der verschieden schnellen Sedimentation von Staubteilchen verschiedener Größe zu untersuchen, habe ich Rechnungen durchgeführt, in denen die Startverteilung zum Zeitpunkt $t = 0$ nach Chassefière et al. (1995) als Gammaverteilung (vgl. Abschnitt 1.4)

$$\frac{dN}{dr} = k\, r^{\frac{1}{b}-3}\, e^{-\frac{r}{ab}} \tag{8.11}$$

mit den Parametern $a = 1.2\,\mu\mathrm{m}$ und $b = 0.25$ gewählt wurde. Die spezielle Wahl von b erlaubt es, (8.11) in der weniger abschreckenden Form

$$\frac{dN}{dr} = k\, r\, e^{-4\frac{r}{a}} \tag{8.12}$$

zu schreiben, doch ist es ein Ziel dieses Abschnitts, auch die Veränderung in b zu bestimmen, so daß wir uns nicht auf die spezielle Form (8.12) beschränken können.

Um für eine gegebene Population, die in der Regel bestenfalls näherungsweise dem Verteilungsgesetz (8.11) genügen wird, quantitative Aussagen über die Größenverteilung machen zu können, ist es hilfreich, die Parameter a und b für allgemeine Verteilungen zu definieren. Wir definieren den *effektiven Radius* einer Teilchenpopulation mit der Verteilungsfunktion $N(r)$ als

$$a := \frac{<r^3>}{<r^2>}\,, \tag{8.13}$$

wobei die spitzen Klammern den Mittelwert über die Verteilung bezeichnen,

$$<f(r)> := \frac{\int_0^\infty \frac{dN}{dr} f(r)\, dr}{\int_0^\infty \frac{dN}{dr}\, dr}\,. \tag{8.14}$$

Der Grund für das Auftreten der zweiten und dritten Potenz von r in (8.13) liegt darin, daß für Beobachtungen von Aerosolen in allen Wellenlängenbereichen des elektromagnetischen Spektrums der Querschnitt πr^2 wesentlich relevanter ist als der Teilchenradius oder gar die bloße Teilchenzahl. Aus diesem Grund werden Mittelwerte, die aus Beobachtungen abgeleitet werden sollen, mit r^2 gewichtet und es ist sinnvoll, einen Mittelwert $<\cdot>_{r^2}$ gemäß

$$<f(r)>_{r^2} := \frac{\int_0^\infty \frac{dN}{dr} r^2 f(r)\, dr}{\int_0^\infty \frac{dN}{dr} r^2\, dr}\,. \tag{8.15}$$

einzuführen. Mit dieser Definition nimmt (8.13) die greifbarere Form

$$a := <r>_{r^2} \tag{8.16}$$

an, die auch die Bezeichnung «effektiver Radius» verständlich macht, da a ja gerade der Mittelwert des Radius bezüglich der mit dem Querschnitt (also — abgesehen von Feinheiten des Streuverhaltens — der optischen Effizienz) gewichteten Verteilungsfuntion ist.

Die *effektive Varianz* b der Verteilungsfunktion $N(r)$ definieren wir durch

$$b = \frac{<r^2>_{r^2} - (<r>_{r^2})^2}{a^2} \ . \tag{8.17}$$

Eigentlich stellt nicht b, sondern $b{\cdot}a^2$ eine Varianz im stochastischen Sinne dar, aber wir wollen hier der Nomenklatur von Hansen und Travis (1974) und Chassefière et al. (1995) folgen, welche die dimensionslose Größe b so bezeichnen. Es ist nicht schwer, wenn auch ein wenig umständlich, nachzurechnen, daß für die Gamma-Verteilung (8.11) die Parameter a und b in der Tat den effektiven Radius und die effektive Varianz darstellen, weswegen es hier auch erlaubt ist, in (8.11) wie in (8.16) und (8.17) die gleichen Symbole zu verwenden.

In den numerischen Rechnungen erfolgte die Berechnung der Integrale (8.15) durch Gauß-Laguerre-Integration, da diese der effektivste Weg ist, mit Integranden der Form (8.11) umzugehen, die eine abfallende Exponentialfunktion enthalten. Um die Integration möglichst genau durchführen zu können, wurden die zehn Teilchengrößen $r_i \in \{0.0418,\ 0.221,\ 0.548,\ 1.03,\ 1.68,\ 2.52,\ 3.59,\ 4.93,\ 6.67,\ 9.07\}\,\mu\mathrm{m}$ gewählt, die sich aus den Knoten der zehnpunktigen Gauß-Laguerre-Integrationsformel ergaben (siehe Abramowitz und Stegun, 1984).

8.3.1 Modelle ohne zusätzliche Diffusivität

Abbildungen 8.11 und 8.14 zeigen die zeitliche Entwicklung der vertikalen Profile von a und b über die Simulationszeit von 20 Tagen. Als Anfangsverteilung wurde eine Gammaverteilung (8.11) mit den Parametern $a_0 = 1.2\,\mu\mathrm{m}$, $b_0 = 0.25$ gewählt, die einen groben Mittelwert aus den Messungen von Chassefière et al. (1995) darstellen.

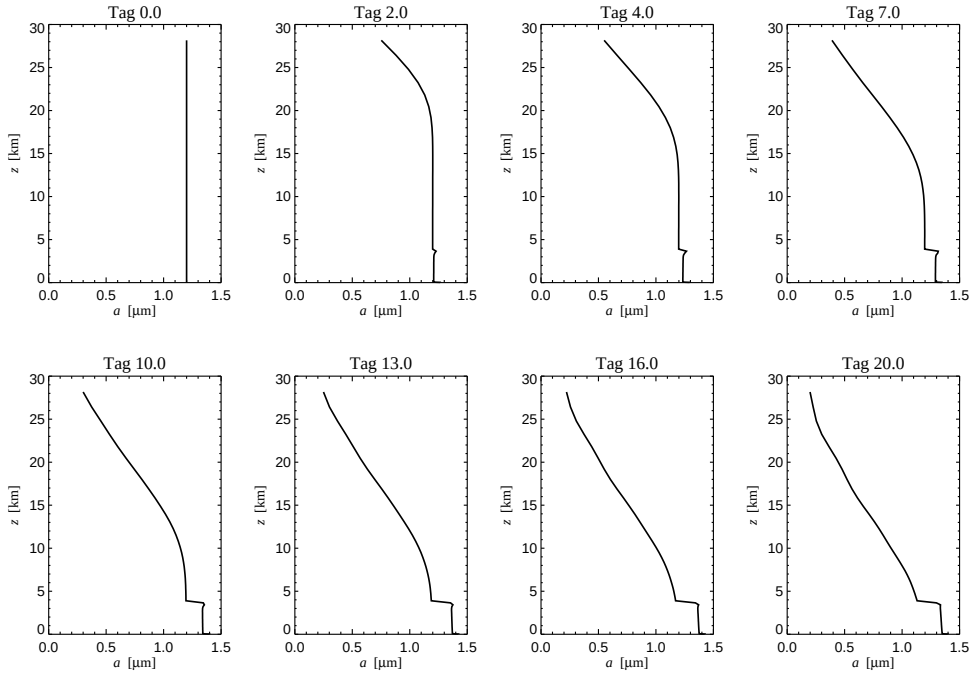

Abbildung 8.11: Zeitliche Veränderung des Höhenprofils des effektiven Radius a, ausgehend von einer Gammaverteilung mit $a_0 = 1.2\,\mu\text{m}$ $b_0 = 0.25\,\mu\text{m}$. Die Tageszeit ist jeweils 0:00 Uhr

In den höheren Schichten geht a zurück, da die großen Partikel relativ rasch ausfallen. In den mittleren Schichten ändert sich a in den ersten acht Tagen überhaupt nicht, da das Mischungsverhältnis der absinkenden Teilchen sich praktisch nicht verändert, bis der obere Rand der Verteilung in den betrachteten Höhenbereich gesunken ist, vgl. die Diskussion auf Seite 125. In der Planetaren Grenzschicht kehren sich die Verhältnisse der oberen Atmosphäre gerade um, denn hier dominieren, wie in den Abbildungen 8.1 bis 8.4 zu sehen ist, die großen Teilchen, da sie die täglich durch den turbulenten Transport zur Oberfläche erlittenen Verluste am ehesten kompensieren können.

Nach zwanzig Tagen beträgt der Wert von a in der Planetaren Grenzschicht das dreifache des effektiven Teilchenradius in $20\,\text{km}$ Höhe; a hat sich in der höheren Atmosphäre stark zu wesentlich kleineren Werten verschoben, am oberen Rand der Planetaren Grenzschicht herrscht noch ungefähr der Startwert a_0, während in der Grenzschicht eine deutliche Zunahme erfolgt ist.

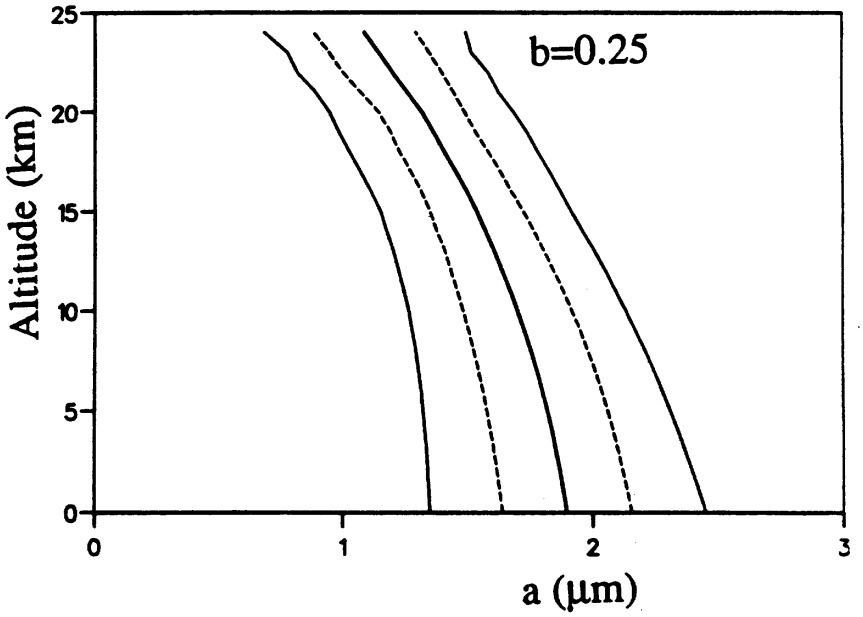

Abbildung 8.12: Höhenabhängigkeit des effektiven Radius aus *Phobos*-Messungen nach Chassefière et al. (1995). Die dicke Linie stellt den Mittelwert der Messungen dar, die gestrichelten Linien zeigen den Bereich der instrumentellen Fehler an, und die durchgezogenen Linien zeigen die areographische Variation der Profile

Ein Vergleich mit den von Chassefière et al. (1995) ermittelten Profilen (Abbildung 8.12) zeigt, daß a den Messungen zufolge mit wachsender Höhe wesentlich schwächer zurückgeht.

Bei der Berechnung der «effektiven Varianz» b zeigte sich, daß die Anzahl der Gauß-Laguerre-Knoten — also die Zahl der zu behandelnden Staubpopulationen — relativ hoch gewählt werden muß, um stabile Werte zu erhalten (Abbildung 8.13). Insbesondere liefert eine fünfpunktige Integrationsformel starke Schwankungen im b-Profil, die mit den Obergrenzen der einzelnen Staubpopulationen zusammenhängen dürften. Der effektive Radius a ist weniger empfindlich, da in seine Berechnung gemäß (8.16) weniger hohe Momente der Größenverteilung eingehen als in die von b und außerdem keine Differenzen und Quotienten gebildet werden wie in (8.17). Abbildung 8.14 legt nahe, daß das Höhenprofil von b relativ geringe Schwankungen zeigt, sieht man vom oberen Rand der Planetaren Grenzschicht und vom Höhenbereich $z \geq 20\,\mathrm{km}$ ab.

In letzterem würde eine Erhöhung der Ordnung der Gauß-Laguerre-Integration auf mehr als zehn wahrscheinlich noch zu kleineren Änderungen führen; da die Verteilung hier aber ohnehin sehr stark an großen Teilchen abgereichert ist und sich damit weit von der Gammaverteilung (8.11) entfernt hat, ist die «effektive Varianz» in diesem Höhenbereich ohne physikalische Bedeutung. Insgesamt nimmt b in fast allen Höhen mit der Zeit ab, da die Größenverteilung sich auf kleinere Teilchen zusammenzieht.

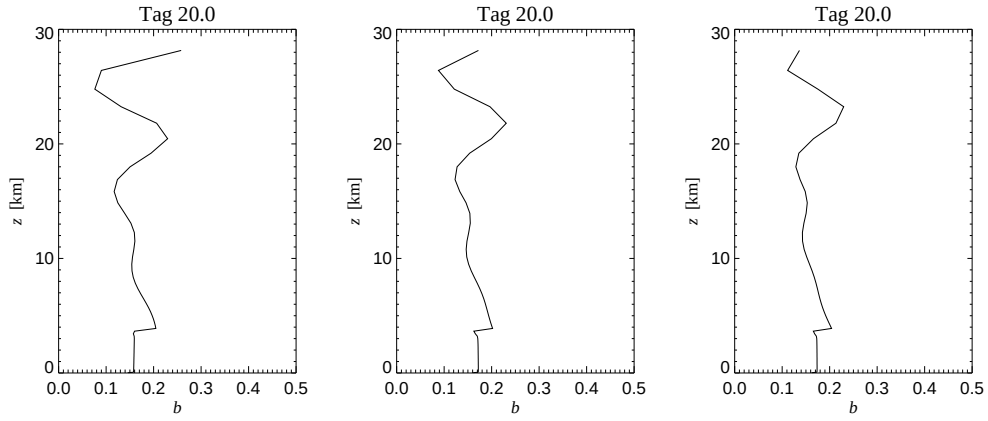

Abbildung 8.13: Höhenabhängigkeit der «effektiven Varianz» b nach zwanzig Tagen, berechnet für verschiedene Ordnungen n (Zahl der Knoten) der Gauß-Laguerre-Integrationsformel. Links: $n = 8$; Mitte: $n = 9$; rechts: $n = 10$. Höhere Werte von n wurden aus technischen Gründen nicht gerechnet. Das Maximum von b oberhalb von $z = 20\,\mathrm{km}$ scheint stabil zu sein, bezieht sich aber auf eine Größenverteilung, die extrem zu kleinen Teilchen hin verschoben ist (vgl. Abbildung 8.11).

In den Abbildungen 8.15 und 8.16 sind die eben beschriebenen Vorgänge noch einmal unter einem etwas anderen Blickwinkel dargestellt. Aufgetragen sind hier die zeitlichen Variationen von a und b über die 20 Simulationstage in sechs vertikalen Niveaus. Man sieht deutlich die gegenläufige Tendenz des effektiven Radius a in höheren und tieferen Schichten und ebenso die zeitliche Abnahme des Parameters b.

Veränderte Anfangsverteilung

Da für die gegebene Anfangsverteilung die Werte des effektiven Radius a schon nach wenigen Tagen deutlich unter den von Chassefière et al. (1995) gemessenen Werten liegen, habe ich in einem weiteren Expe-

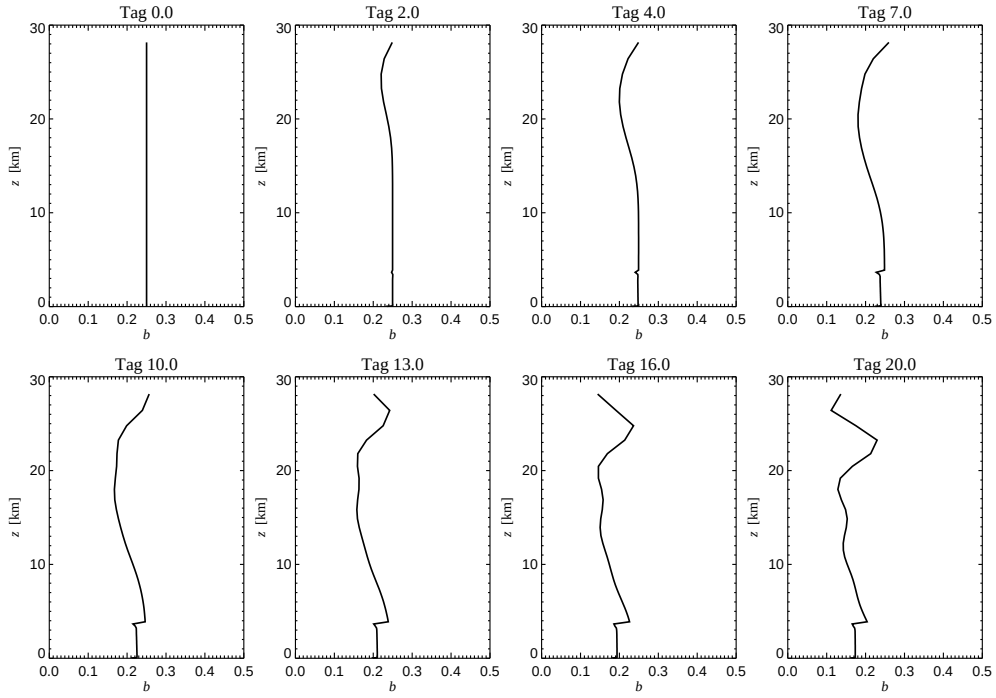

Abbildung 8.14: Zeitliche Veränderung des Höhenprofils der «effektiven Varianz» b im gleichen Modell wie in Bild 8.11

riment eine Gammaverteilung (8.11) mit den Parametern $a_0 = 2.0\,\mu\mathrm{m}$, $b_0 = 0.25$ als Startbedingung gewählt.

Die resultierenden Profile sind in den Abbildungen 8.17 und 8.18 gezeigt. Es ändert sich, kurz gesagt, herzlich wenig an der allgemeinen Entwicklung der Profile. Bei genauem Hinschauen sieht man, daß die Entwicklung zu kleineren Werten des effektiven Radius bei der «größeren» Verteilung erwartungsgemäß schneller erfolgt, insbesondere ist a in Abbildung 8.17 nach 20 Tagen auch in der Planetaren Grenzschicht kleiner als der Startwert, während in Abbildung 8.11 die Verteilung in den untersten 4 Kilometern zu diesem Zeitpunkt noch zu größeren Radien verschoben ist.

8.3.2 Modelle mit zusätzlicher Diffusivität

Abbildungen 8.19 und 8.20 zeigen die Entwicklung der Profile von a und b im Modell mit der Hintergrunddiffusivität $K_{\mathrm{bg}} = 10\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$. Man sieht, daß die Variation von a im Vergleich zu Abbildung 8.11 deutlich redu-

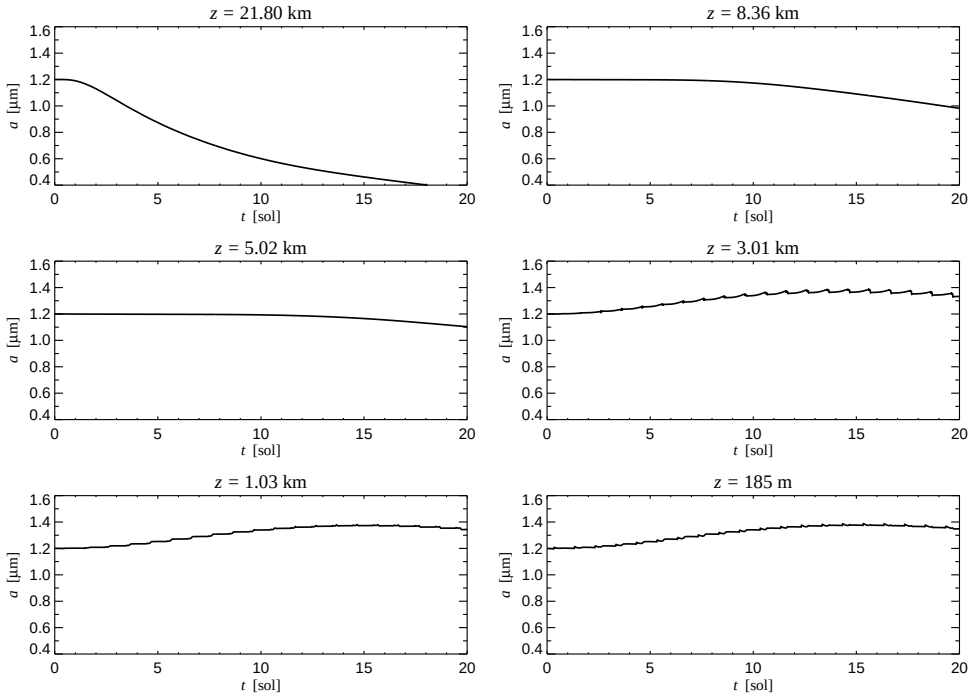

Abbildung 8.15: Zeitabhägigkeit des effektiven Radius a in verschiedenen Höhen für das in Abbildung 8.11 dargestellte Modell

ziert ist, und interessanterweise die Sonderrolle der Planetaren Grenzschicht wesentlich weniger stark ausgeprägt ist. Die in Abbildung 8.14 aufgetretenen Schwankungen von b machen nun einem viel regulläreren Verhalten Platz.

Abbildungen 8.21 und 8.22 zeigen schließlich die Profile von a und b für $K_{\mathrm{bg}} = 100\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$. Hier sind die Variationen fast ganz verwischt; a sinkt nach oben hin deutlich weniger als in den Beobachtungen von Chassefière et al. (1995), während b nun so gut wie konstant ist.

8.4 Diskussion der Ergebnisse

Die in diesem Kapitel vorgestellten Rechnungen zeigen übereinstimmend, daß das Staub-Mischungsverhältnis für alle betrachteten Teilchengrößen in der Planetaren Grenzschicht stark reduziert ist. Bei konstantem Mischungsverhältnis in der höheren Atmosphäre führt dies zu einer Reduktion der Säulendichte von

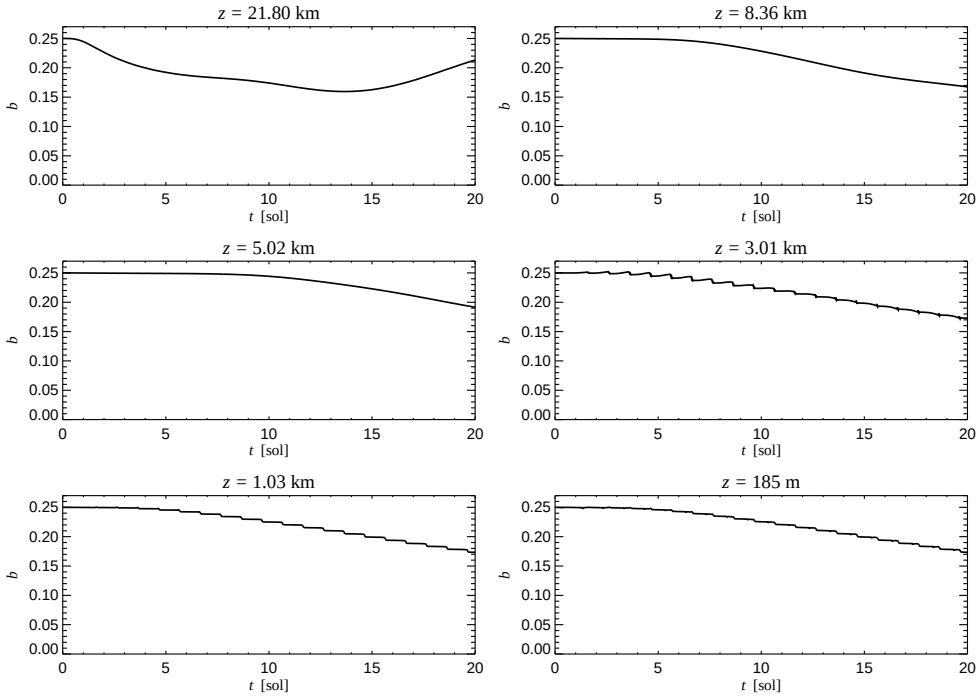

Abbildung 8.16: Wie in Abbildung 8.15 aber für die «effektive Varianz» b

immerhin 30 % [vgl. Gleichung (8.9)], oder umgekehrt auf einen entsprechend höheren Wert von $q(z{>}h_{\mathrm{PBL}})$, wenn aus der beobachteten Säulendichte auf q geschlossen wird.

Es ist fraglich, ob diese Abreicherung der untersten Schicht sich mit den derzeit vorhandenen Messungen eindeutig belegen läßt, da bei Bedeckungsanalysen von der Erde oder aus einer Umlaufbahn (wie etwa den von Chassefière et al., 1992, 1995, analysierten Messungen der *Phobos*-Sonde) die notwendige vertikale Auflösung nicht erreicht wird, während atmosphärische Extinktionsmessungen von den Landefähren als einzige «Normlichtquellen» astronomische Objekte zur Verfügung haben, deren Beobachtung immer nur Information über die Gesamtextinktion längs eines Sehstrahls durch die ganze Atmosphäre liefern können.

Andererseits muß die Abreicherung berücksichtigt werden, wenn Beobachtungen von fernen Objekten innerhalb der Planetaren Grenzschicht gemacht werden, da dann ein simples Extrapolieren der gesamten optischen Dichte auf die untersten Meter eine viel zu hohe Extinktion ergäbe und somit teilweise optische Eigenschaften des beobachteten

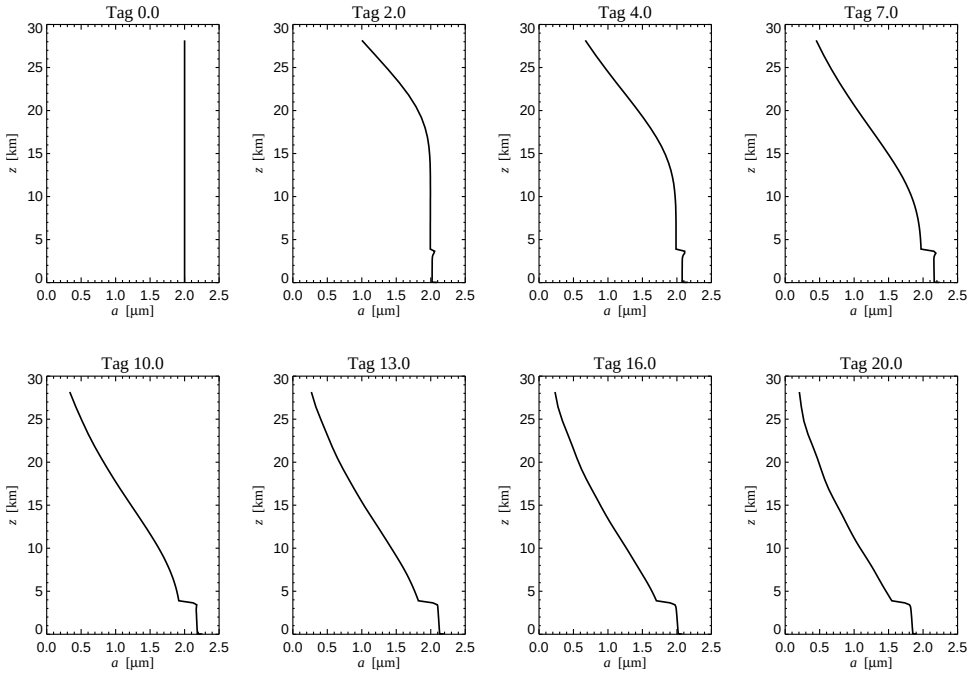

Abbildung 8.17: Zeitliche Veränderung des Höhenprofils des effektiven Radius a ausgehend von einer Gammaverteilung mit $a_0 = 2.0\,\mu\mathrm{m}$ $b_0 = 0.25\,\mu\mathrm{m}$.

Objekts fälschlicherweise dem atmosphärischen Staub zugeschrieben würden.

Das Hauptproblem der von Conrath (1975) und von Chassefière et al. (1992; 1995) postulierten zusätzlichen Diffusivität liegt darin, daß diese (zumindest in sämtlichen hier untersuchten Fällen) wesentlich effektiver das Ausfallen der Teilchen durch diffusiven Transport zur Oberfläche beschleunigt, als sie in höheren Schichten zu der Homogenisierung führt, um deren willen sie eingeführt wurde.

Selbst wenn man die zusätzliche Diffusivität nicht konstant hält, sondern nach oben hin anwachsen läßt — und vielleicht überhaupt erst deutlich oberhalb von $10\,\mathrm{km}$ Höhe wirksam werden läßt, da man sonst auch in Widerspruch zu gemessenen Temperaturprofilen und anderen Daten gerät — wird sich hieran wenig ändern: Auch die Wärmeleitung wird durch eine Diffusionsgleichung beschrieben, und man kann den Wärmefluß durch einen unten gekühlten Stab nicht dadurch reduzieren, daß man weiter oben ein Stück Kunststoff durch Silber ersetzt.

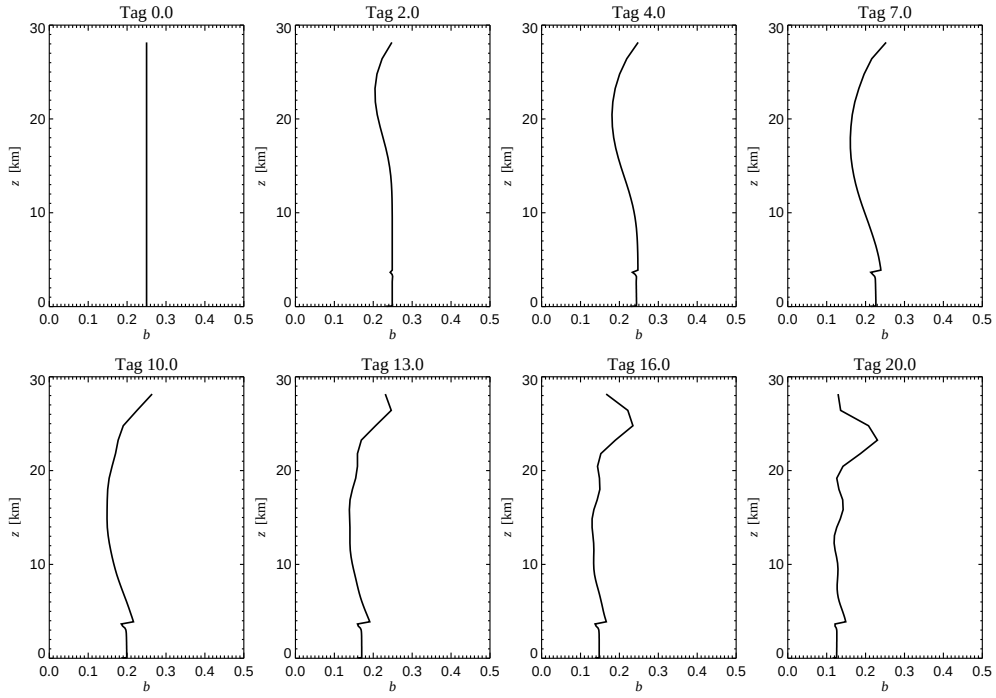

Abbildung 8.18: Zeitliche Veränderung des Höhenprofils der «effektiven Varianz» b im gleichen Modell wie im vorherigen Bild

Wenn Conrath (1975) zu anderen Schlußfolgerungen gelangt, so deswegen, weil er als untere Randbedingung $dq/dz = 0$ vorgibt. Da sein Modell sich auf die Abklingphase eines Staubsturms bezieht, also eine Zeit hoher Windgeschwindigkeiten auch in Bodennähe, mag dies zulässig sein. In ruhigen Zeiten hingegen — etwa während der *Phobos*-Messungen — wirkt die Oberfläche in weiten Gebieten fast ausschließlich als Senke für den Staub, daher muß $q(z{=}0) = 0$ gelten, und die Oberflächenschicht der Planetaren Grenzschicht bestimmt den Sedimentationsfluß des Staubes.

Abschließend läßt sich sagen, daß die Präsenz von Staub in der Marsatmosphäre über das ganze Jahr sich ohne langfristige Quellen nicht aufrechterhalten läßt. Insbesondere *beschleunigt* die turbulente Diffusivität unabhängig von ihrer Höhenverteilung das Ausfallen des Staubes.

Als mögliche Quellen kommen etwa «Staubwirbel» (englisch “dust devils”) in Betracht: kleine, rotierende Staubstürme, die Breiten von

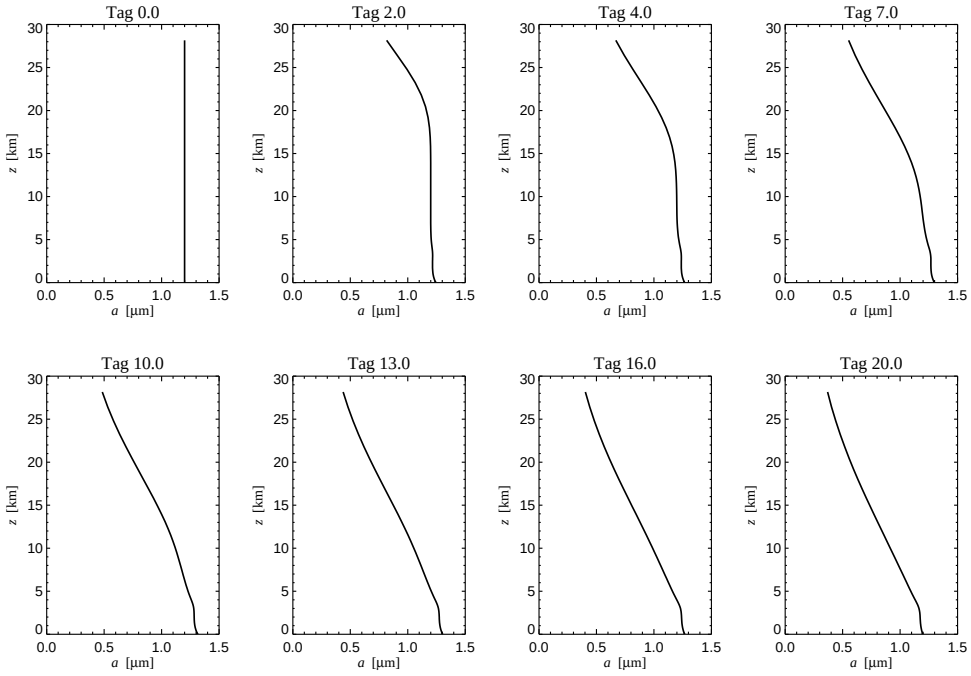

Abbildung 8.19: Zeitliche Veränderung des Höhenprofils des «effektiven Radius» a im Szenario mit zusätzlichem Diffusionskoeffizenten $K_q = 10\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$

$\leq 1\,\mathrm{km}$ und Höhen von bis zu $6\,\mathrm{km}$ erreichen (siehe Kahn et al., 1992). Ob diese sehr lokalen Erscheinungen aber wirklich die nötige Menge Staub in die Atmosphäre tragen können, ist recht zweifelhaft. Eine andere Möglichkeit wären lokale starke Winde wie etwa Steigungswinde (Blumsack et al., 1972; Kahn und Gierasch, 1982; Ye et al., 1990), die Staub aufwirbeln, der dann von horizontalen Strömungen über größere Teile der Atmosphäre verbreitet wird.

Hier gibt es sicher noch viel zu erforschen, ehe die atmosphärische Dynamik des Roten Planeten wirklich verstanden ist.

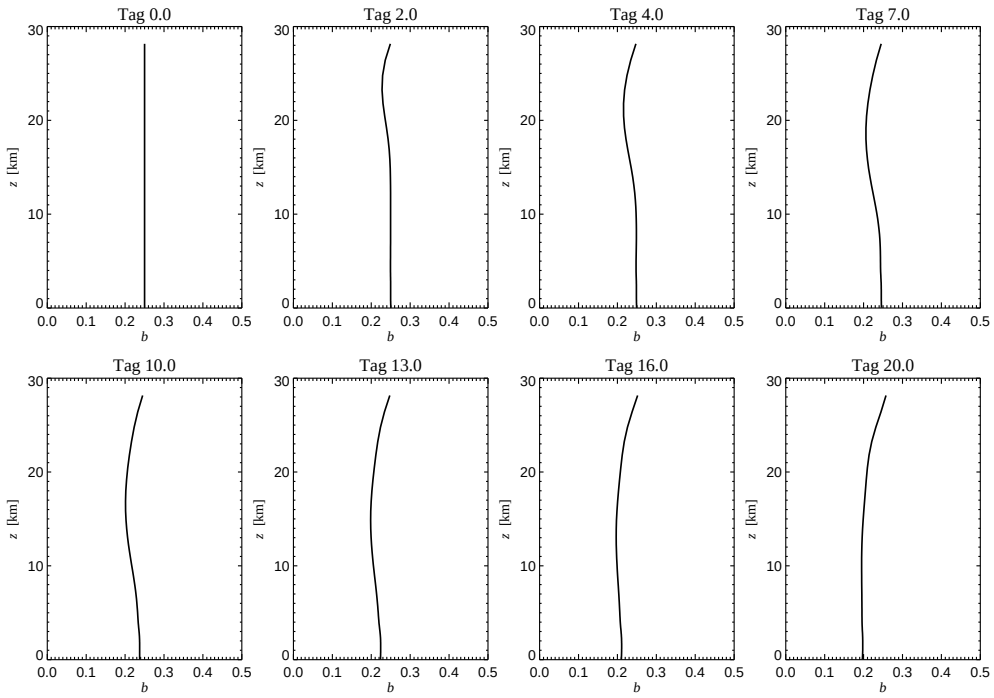

Abbildung 8.20: Zeitliche Veränderung des Höhenprofils der «effektiven Varianz» b bei zusätzlichem Diffusionskoeffizenten $K_q = 10\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$

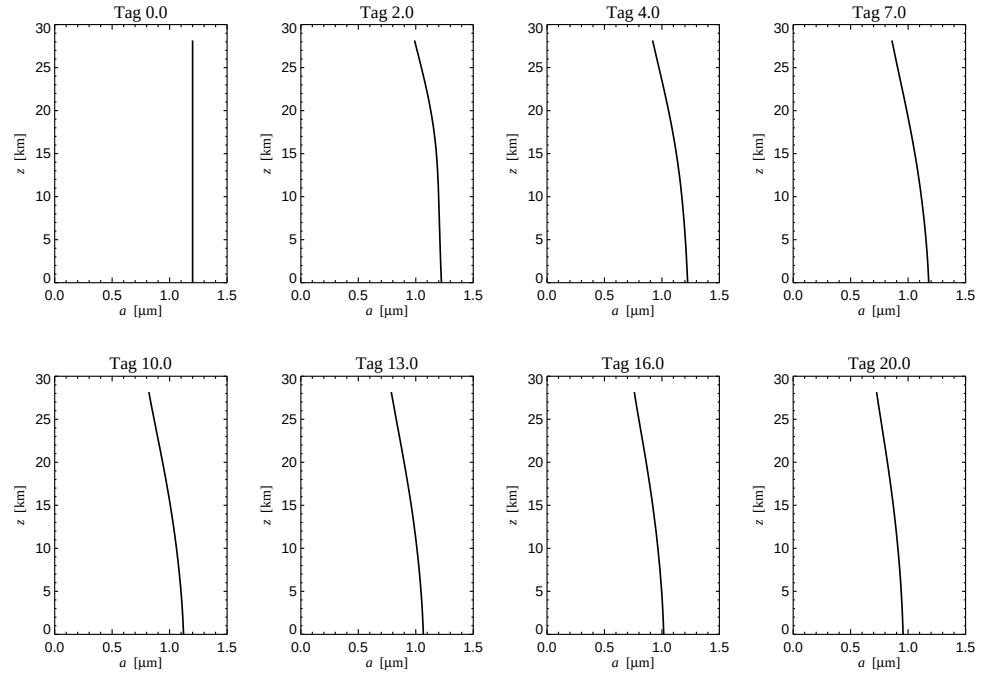

Abbildung 8.21: Zeitliche Veränderung des Höhenprofils des «effektiven Radius» a im Szenario mit zusätzlichem Diffusionskoeffizenten $K_q = 100\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$

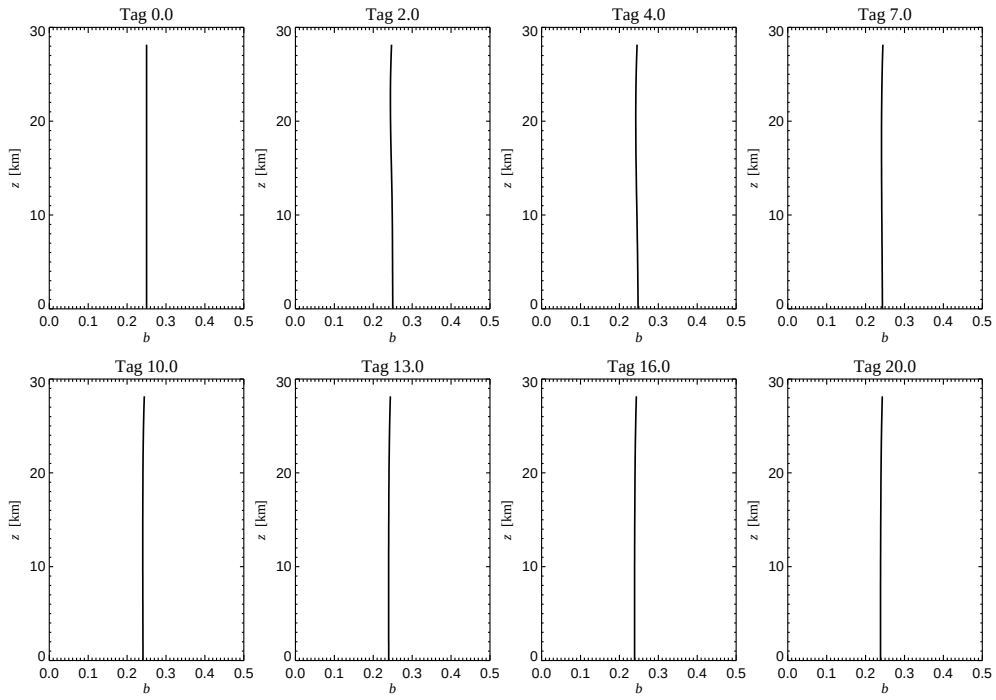

Abbildung 8.22: Zeitliche Veränderung des Höhenprofils der «effektiven Varianz» b bei zusätzlichem Diffusionskoeffizenten $K_q = 100\ \mathrm{m}^2/\mathrm{s}$

Kapitel 9

Zusammenfassung

Es wurde ein Modell der Planetaren Grenzschicht des Mars entwickelt, das auf einem K-ε-Modell in der Atmosphäre, Ähnlichkeitsbeziehungen der Monin-Obuchov-Theorie als unterer Randbedingung und homogener Wärmeleitung im Boden beruht. Zur Lösung der resultierenden, stark nichtlinearen Differentialgleichungen wurde ein iteriertes implizites Verfahren entwickelt, das erst in einer Abwandlung frei von numerischem Chaos war.

Der Vergleich der berechneten meteorologischen Größen mit Messungen und anderen Modellrechnungen verlief zufriedenstellend, wobei die Datenlage aber oft recht fragwürdig ist.

Bei verschiedenen Rechnungen, die den Transport von atmosphärischem Staub mit einschlossen, ergaben sich folgende Ergebnisse:

- In der Planetaren Grenzschicht ist der Staub im Vergleich mit höheren Schichten der Atmosphäre relativ stark abgereichert.
- Die untere Randbedingung für Staub ist bei nicht zu hohen Windgeschwindigkeiten im Geltungsbereich des eindimensionalen Modells absorbierend.
- Die Annahme zusätzlicher Diffusivität vermag nur bei relativ hohen Werten zu einer gewissen Konstanz in der Größenverteilung der Staubpartikel zu führen, beschleunigt dann aber das Ausfallen des Staubes drastisch.
- Da sich das Absinken des Staubes innerhalb weniger Wochen

nicht verhindern läßt, müssen ständige Quellen für den Staub existieren.

- Eine vertikale Variation des effektiven Radius mit der Höhe in der von Chassefière et al. (1995) angegebenen Größenordnung konnte am ehesten mit einer zusätzlichen Diffusivität von $10\,\mathrm{m/s}$ erreicht werden; sie ist aber (wie die ganzen Staubpopulationen) nicht langfristig stabil.

In den Rechnungen ohne zusätzliche Diffusivität bleibt über eine Dauer von 20 Tagen mehr als die Hälfte des Staubes in der Atmosphäre, wenn auch die Größenverteilung sich in den höheren Schichten stärker zu kleineren Radien verschiebt, als dies den Ergebnissen von Chassefière et al. (1995) entspricht. Bei Annahme einer zusätzlichen Hintergrunddiffusivität von $10\,\mathrm{m^2/s}$ ergibt sich bessere Übereinstimmung mit den Daten von Chassefière et al. (1995), ohne daß sich die zeitliche Entwicklung der Staubmenge einschneidend ändert. Eine Hintergrunddiffusivität von $100\,\mathrm{m^2/s}$ wirkt stark homogenisierend auf die Größenverteilung der Teilchen, erhöht die Ausfallraten aber drastisch und führt zu unrealistisch kurzen Sedimentationszeiten.

Literaturverzeichnis

Abramowitz, M. und Stegun, I. A. (1984). *Pocketbook of Mathematical Functions*, Verlag Harri Deutsch, Thun, Frankfurt/Main.

Anderson, A. D. (1967). Spherical particle terminal velocities in the Martian daytime atmosphere from 0 to 50 kilometers, *Journal of Geophysical Research* **72**(7): 1951–1958.

André, J. C., De Moor, G., Lacarrère, P. und du Vachat, R. (1976). Turbulence approximations for inhomogeneous flows — Part II: The numerical simulation of a penetrative convection experiment, *Journal of the Atmospheric Sciences* **33**: 482–491.

André, J. C., De Moor, G., Lacarrère, P., Therry, G. und du Vachat, R. (1978). Modeling the 24-hour evolution of the mean and turbulent structures of the planetary boundary layer, *Journal of the Atmospheric Sciences* **35**: 1861–1883.

Barnes, J. R. (1980). Time spectral analysis of midlatitude disturbances in the Martian atmosphere, *Journal of the Atmospheric Sciences* **37**: 2002–2015.

Barnes, J. R. (1984). Linear baroclinic instability in the Martian atmosphere, *Journal of the Atmospheric Sciences* **41**(9): 1536–1550.

Blumsack, S. L., Gierasch, P. J. und Wessel, W. R. (1972). An analytical and numerical study of the Martian planetary boundary layer over slopes, *Journal of the Atmospheric Sciences* **30**: 66–82.

Chamberlain, J. W. und Hunten, D. M. (1987). *Theory of Planetary Atmospheres*, second edn, Academic Press, Orlando.

Chandrasekhar, S. (1950). *Radiative Transfer*, Oxford Univ. Press, Oxford. 393 pp.

Chassefière, E., Blamont, J. E., Krasnopolsky, V. A., Korablev, O. I., Atreya, S. K. und West, R. A. (1992). Vertical structure and size distributions of Martian aerosols from solar occultation measurements, *Icarus* **97**: 46–69.

Chassefière, E., Drossart, P. und Korablev, O. (1995). Post-Phobos model for the altitude and size distribution of dust in the low Martian atmosphere, *Journal of Geophysical Research* **100**(E3): 5525–5539.

Colburn, D., Pollack, J. und Haberle, R. (1989). Diurnal variations in optical depth at Mars, *Icarus* **79**: 159–189.

Conrath, B. J. (1975). Thermal structure of the Martian atmosphere during the dissipation of the dust storm of 1971, *Icarus* **24**(1): 36–46.

Davies, C. N. (1945). Definitive equations for the fluid resistance of spheres, *Proc. Phys. Soc. London* **57**: 259–270.

Deardorff, J. W. (1970). Convective velocity and temperature scales for the unstable planetary boundary layer and for Rayleigh convection, *Journal of the Atmospheric Sciences* **27**: 1211–1213.

Detering, H. W. (1985). *Mischungsweg und turbulenter Diffusionskoeffizient in atmosphärischen Simulationsmodellen*, Dissertation, Universität Hannover.

Detering, H. W. und Etling, D. (1985). Application of the E-ε turbulence model to the atmospheric boundary layer, *Boundary-Layer Meteorology* **33**: 113–133.

Duynkerke, D. G. (1988). Application of the E-ε turbulence closure models to the neutral and stable atmospheric boundary layer, *Journal of the Atmospheric Sciences* **45**(5): 865–880.

Duynkerke, P. G. und Driedonks, A. G. M. (1987). A model for the turbulent structure of the stratocumulus-topped atmospheric boundary layer, *Journal of the Atmospheric Sciences* **44**: 43–64.

Dyer, A. J. (1974). A review of flux-profile relationships, *Boundary-Layer Meteorology* **7**: 363–372.

Etling, D. (1987). *The Planetary Boundary Layer*, Landolt-Börnstein New Series V/4c1, Springer, Berlin, chapter 16, pp. 151–188.

Feigenbaum, M. J. (1978). Quantitative universality for a class of nonlinear transformations, *Journal of Statistical Physics* **19**(1): 25–52.

Feigenbaum, M. J. (1979). The universal metric properties of nonlinear transformations, *Journal of Statistical Physics* **21**(1): 669–706.

Gierasch, P. J. (1974). Martian dust storms, *Reviews of Geophysics and Space Physics* **12**(4): 730–734.

Gierasch, P. J. und Goody, R. M. (1968). A study of the thermal and dynamical structure of the Martian lower atmosphere, *Planetary Space Science* **16**: 615–646.

Gierasch, P. J. und Goody, R. M. (1972). The effect of dust on the temperature of the Martian atmosphere, *Journal of the Atmospheric Sciences* **29**: 400–402.

Golitsyn, G. S. und Demchenko, P. F. (1979). An estimate of the turbulent fluxes of momentum and of heat near the surface of Mars from the data of Viking I, *Космические Исследования* **17**(2): 286–290. Transl. in *Cosmic Research* **17**(2), 237–240 (1979).

Golitsyn, G. S. (ed.) (1992). *Советско-американский эксперимент по изучению аридного аэрозоля. Таджикистан, СССР, сентябрь 1989 г. (The Sowjet-American Experiment to Investigate Arid Aerosol. Tadschikistan, USSR)*, НПО «тайфун», Sankt Peterburg. [in Russian].

Goody, R. M. und Yung, Y. L. (1989). *Atmospheric Radiation: Theoretical Basis*, second edn, Oxford University Press.

Haberle, R. M., Houben, H. C., Hertenstein, R. und Herdtle, T. (1993). A boundary-layer model for Mars: Comparison with Viking lander and entry data, *Journal of the Atmospheric Sciences* **50**(11): 1544–1559.

Hansen, J. E. (1969). Radiative transfer by doubling very thin layers, *Astroph. J.* **155**: 565–573.

Hansen, J. E. und Travis, L. D. (1974). Light scattering in planetary atmospheres, *Space Science Reviews* **16**: 572–610.

Harlow, F. H. und Nakayam, P. I. (1967). Turbulence transport equations, *Physics of Fluids* **10**: 2323–2332.

Hoffman, J. D. (1992). *Numerical Methods for Engineers and Scientists*, McGraw-Hill, New York.

Horvath, H. (1979). Method for the determination of dynamic shape factors of sphere aggregates by measuring the sedimentation velocity in a capacitor, *Journal of Aerosol Science* **10**: 309–315.

Hourdin, F. (1992). A new representation of the absorption by the CO_2 15-μm band for a Martian general circulation model, *Journal of Geophysical Research* **97**(E11): 18319–18335.

Huang, C.-Y. und Raman, S. (1989). Application of the E-ε closure model to simulations of mesoscale topographic effects, *Boundary-Layer Meteorology* **49**: 169–195.

Huang, C.-Y. und Raman, S. (1991). Numerical simulation of January 28 cold air outbreak during GALE. Part I: The model and sensitivity tests of turbulence closures, *Boundary-Layer Meteorology* pp. 381–407.

Iversen, J. D., Greeley, R. und Pollack, J. B. (1976). Windblown dust on Earth, Mars and Venus, *Journal of the Atmospheric Sciences* **33**: 2425–2429.

Kahn, R. A., Martin, T. Z., Zurek, R. W. und Lee, S. W. (1992). *The Martian Dust Cycle*, in Kieffer et al. (1992), chapter 29, pp. 1017–1053.

Kahn, R. und Gierasch, P. (1982). Long cloud observations on Mars and implications for boundary layer characteristics over slopes, *Journal of Geophysical Research* **87**(A2): 867–880.

Kieffer, H. H. (1976). Soil and surface temperatures at the Viking landing sites, *Science* **194**: 1344–1346.

Kieffer, H. H., Jakosky, B. M., Snyder, C. W. und Matthews, M. S. (eds) (1992). *Mars*, Space Science Series, The University of Arizona Press, Tucson & London.

Landau, L. D. und Lifschitz, E. M. (1991). *Lehrbuch der Theoretischen Physik. Band 6. Hydrodynamik*, fifth edn, Akademie-Verlag, Berlin.

Lechner, M. D. (ed.) (1992). *Physikalisch-chemische Daten*, Vol. 1 of *D'Ans, Lax – Taschenbuch für Chemiker und Physiker*, fourth edn, Springer, Berlin.

Liou, K.-N. (1992). *Radiation and Cloud Processes in the Atmosphere*, number 20 in *Oxford Monographs on Geology and Geophysics*, Oxford University Press, New York/Oxford.

Lorenz, E. N. (1963). Deterministic non-periodic flow, *Journal of the Atmospheric Sciences* **20**: 130–141.

Mars Fact Sheet (n.d.).
URL: `http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/marsfact.html`

May, R. M. (1976). Simple mathematical models with very complicated dynamics, *Nature* **261**: 459–467.

Meador, W. E. und Weaver, W. R. (1980). Two-stream approximations to radiative transfer in planetary atmospheres: A unified description of existing models and a new improvement, *Journal of the Atmospheric Sciences* **37**: 630–643.

Mellor, G. L. und Yamada, T. (1982). Development of a turbulence closure model for geophysical fluid problems, *Reviews of Geophysics and Space Physics* **20**(4): 851–875.

Moeng, C.-H. und Randall, D. A. (1984). Problems in simulating the stratocumulus-topped boundary layer with a third-order closure model, *Journal of the Atmospheric Sciences* **41**(9): 1588–1600.

Monin, A. S. und Obukhov, A. M. (1954). Basic laws of turbulent mixing in the atmosphere near the ground, *Tr. Geoph. Inst. Akad. Nauk SSSR* **24**(151): 1963–1987.

Monin, A. S. und Yaglom, A. M. (1973). *Statistical Fluid Mechanics*, Vol. 1 & 2, MIT Press, Cambridge, MA.

Moulton, F. R. (1970). *An Introduction to Celestial Mechanics*, second edn, Dover Publications, New York.

Ockert-Bell, M. E., Bell III, J. F., Pollack, J. B., McKay, C. P. und Forget, F. (1997). Absorption and scattering properties of the Martian dust in the solar wavelengths, *Journal of Geophysical Research* **102**(E4): 9039–9050.

Panofsky, H. A. und Dutton, J. A. (1984). *Atmospheric turbulence: Models and Methods for Engineering Applications*, Wiley, New York.

Paulson, C. A. (1970). The mathematical representation of wind speed and temperature profiles in the unstable atmospheric surface layer, *Journal of Applied Meteorology* **9**: 857–861.

Perov, V. L. und Glazunov, A. V. (1991). Модель пограничного слоя атмосферы при наличии слоисто-кучевой облачности (A Model of the Atmospheric Boundary Layer in the Presence of Stratocumulus Clouds), *Preprint 274*, Академия Наук, Отдел вычислительной математики (Department of Numerical Mathematics of the Russian Academy of Science). [in Russian].

Pielke, R. A. (1984). *Mesoscale Meteorological Modelling*, Academy Press, New York. 612 pp.

Pollack, J. B. (1982). Properties of dust in the Martian atmosphere and its effect on temperature structure, *Adv. Space Res.* **2**: 45–56.

Pollack, J. B., Colburn, D., Kahn, R., Hunter, J., Camp, W. V., Carlston, C. E. und Wolf, M. R. (1977). Properties of aerosols in the Martian atmosphere, as inferred from Viking lander imaging data, *Journal of Geophysical Research* **82**(28): 4479–4496.

Pollack, J. B., Colburn, D. S., Flasar, F. M., Kahn, R., Carlston, C. E. und Pidek, D. (1979). Properties and effects of dust particles suspended in the Martian atmosphere, *Journal of Geophysical Research* **84**(B6): 2929–2945.

Pollack, J. B., Haberle, R. M., Schaeffer, J. und Lee, H. (1990). Simulations of the general circulation of the Martian atmosphere 1. Polar processes, *Journal of Geophysical Research* **95**(B2): 1447–1473.

Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T. und Flannery, B. P. (1992). *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*, second edn, Cambridge University Press, Cambridge.

Pruppacher, H. R. und Klett, J. D. (1997). *Microphysics of Clouds and Precipitation*, Atmospheric and Oceanographic Sciences Library, second edn, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Richtmyer, R. D. und Morton, K. W. (1967). *Difference Methods for Initial-Value Problems*, second edn, Interscience Publishers, New York.

Rodgers, C. D. (1967). The use of emissivity in atmospheric radiation calculations, *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.* **93**: 43–54.

Rodi, W. (1980). Turbulence models and their application in hydraulics, *State of the art paper*, IAHR, Delft.

Rossow, W. B. (1978). Cloud microphysics: Analysis of the clouds of Earth, Venus, Mars, and Jupiter, *Icarus* **36**: 1–50.

Rothman, L. S., Gamache, R. R., Tipping, R. H., Rinsland, C. P., Smith, M. A., Benner, D. C., Devi, V. M., Flaud, J.-M., Camy-Peyret, C., Perrin, A., Goldmann, A., Massie, S. T., Brown, L. R. und Toth, R. A. (1992). The HITRAN molecular database: Editions of 1991 and 1992, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* **48**(5/6): 469–507.

Sagan, C. und Pollack, J. B. (1967). Anisotropic nonconservative scattering and the clouds of Venus, *Journal of Geophysical Research* **72**(2): 469–477.

Savijärvi, H. (1991). A model study of the PBL structure on Mars and the Earth, *Beitr. Phys. Atmosph.* **64**(3): 219–229.

Savijärvi, H. (1995). Mars boundary layer modeling: Diurnal moisture cycle and soil properties at the Viking lander 1 site, *Icarus* **117**: 120–127.

Schiller, L. (ed.) (1931). *W. Wien und F. Harms: Handbuch der Experimentalphysik*, Vol. 4. Hydro- und Aerodynamik, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig.

Sorbjan, Z. (1989). *Structure of the Atmospheric Boundary Layer*, Prentice Hall Advanced Reference Series, Prentice Hall, Englewood Cliffs.

Stamnes, K. und Swanson, R. A. (1981). A new look at the discrete-ordinate method for radiative transfer calculations in anisotropically scattering atmospheres, *Journal of the Atmospheric Sciences* **38**: 387–399.

Stull, R. B. (1988). *An Introduction to Boundary Layer Meteorology*, Atmospheric Sciences Library, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston.

Sutton, J. L., Leovy, C. B. und Tillman, J. E. (1978). Diurnal variations of the Martian surface layer meteorological parameters during the first 45 sols at two Viking lander sites, *Journal of the Atmospheric Sciences* **35**: 2346–2355.

Tennekes, H. und Lumley, J. L. (1972). *A First Course in Turbulence*, The MIT Press, Cambridge, Mass; London.

Therry, G. und Lacarrère, P. (1983). Improving the eddy kinetic energy model for planetary boundary layer description, *Boundary-Layer Meteorology* **25**: 63–88.

Thorpe, T. E. (1977). Viking orbiter observations of atmospheric opacity during July–November 1976, *Journal of Geophysical Research* **82**: 4151–4159.

Tillman, J. E., Landberg, L. und Larsen, S. E. (1994). The boundary layer of Mars: Fluxes, stability, turbulent spectra, and growth of the mixed layer, *Journal of the Atmospheric Sciences* **51**(12): 1709–1727.

Ward, W. R. (1974). Climatic variations on Mars. I. Astronomical theory of insolation, *Journal of Geophysical Research* **79**: 3375–3386.

Ward, W. R. (1979). Present obliquity oscillations of Mars: Fourth-order accuracy in orbital e and I, *Journal of Geophysical Research* **84**: 237–241.

Wyngaard, J. C. (1975). Modeling the planetary boundary layer. Extension to the stable case, *Boundary-Layer Meteorology* **9**: 441–460.

Wyngaard, J. C. und Coté, O. R. (1974). The evolution of a convective planetary boundary layer — a higher-order-closure model study, *Boundary-Layer Meteorology* **7**: 289–308.

Ye, Z. J., Segal, M. und Pielke, R. A. (1990). A comparative study of daytime thermally induced upslope flow on Mars and Earth, *Journal of the Atmospheric Sciences* **47**(5): 612–628.

Zent, A. P., Haberle, R. M., Houben, H. C. und Jakosky, B. M. (1993). A coupled subsurface-boundary layer model of water on Mars, *Journal of Geophysical Research* **98**(E2): 3319–3337.

Zurek, R. W. (1982). Martian great dust storms: An update, *Icarus* **50**: 288–310.

Liste der wichtigsten Symbole

a	Einteilchenalbedo (Kapitel 3)
a, b	«Effektiver Radius» und «effektive Varianz» der Teilchengrößenverteilung (Kapitel 1, 8)
c_p	Molare Wärmekapazität der Atmosphäre bei konstantem Druck (Kapitel 2)
$\tilde{c}_p$	Wärmekapazität pro Masse $\tilde{c}_p = c_p/\mu$ (Kapitel 2)
E	Turbulente kinetische Energie (Kapitel 4, 5, 7)
F	Vertikaler Strahlungsfluß (Kapitel 3)
$F_\odot$	Solarkonstante (Kapitel 3)
g	Fallbeschleunigung auf dem Mars (Kapitel 2, 4, 6)
g	Asymmetriefaktor (Kapitel 3)
H	Konvektiver Wärmefluß (Kapitel 4, 5)
h	Wärmefluß $h = H/(c_p\varrho)$ (Kapitel 4, 5)
h_0	Rauhigkeitslänge (Kapitel 4, 5)
I, I_ν	(Spektrale) Intensität (Kapitel 3)
I	Thermische Trägheit $I := \sqrt{c_{\mathrm{soil}}\varrho_{\mathrm{soil}}\lambda}$ (Kapitel 5)
k_ν	Extinktionskoeffizient (Kapitel 3)
L	Monin-Obuchov-Länge (Kapitel 4, 5)
l	Mischungslänge (Kapitel 4)
l_f	Mittlere Freie Weglänge eines Gasmoleküls (Kapitel 6)
m_d	Säulendichte des Staubes (Kapitel 8)
$P(\mu,\varphi;\mu',\varphi')$	Phasenfunktion (Kapitel 3)
R	Universelle Gaskonstante $R = 8.3144\,\mathrm{J}/(\mathrm{Mol}\,\mathrm{K})$ (Kapitel 2)
$\tilde{R}$	Spezifische Gaskonstante $\tilde{R} = R/\mu$ (Kapitel 2)
u_*	Reibungsgeschwindigkeit $u_* = \sqrt{\tau/\varrho}$ (Kapitel 4, 5)
u, v	Ost- und Südkomponente der Windgeschwindigkeit (Kapitel 4, 5, 7)

α	Achsneigung (Abschnitt 1.3)
α, β	Koeffizienten in den verschiedenen tridiagonalen Gleichungssystemen (Kapitel 5)
$\delta(\cdot)$	Diracsche δ-Funktion

δ_{ik}	Kroneckerscher δ-Tensor
ε	Dissipationsrate der Turbulenz (Kapitel 4, 5, 7)
ε	Bahnexzentrizität (Abschnitt 1.3)
ζ	Dimensionslose vertikale Koordinate $\zeta = z/L$ (Kapitel 4, 5)
η	Temperaturleitfähigkeit im Boden, $\eta := \lambda/(c_{\mathrm{soil}}\varrho_{\mathrm{soil}})$ (Kapitel 5)
θ	Potentialtemperatur (Kapitel 3, 4, 5, 7)
Θ	Streuwinkel $\sphericalangle(\mathbf{e}_{\mu,\varphi}, \mathbf{e}_{\mu',\varphi'})$ (Kapitel 3)
κ	Kármán-Konstante (Kapitel 4)
λ	Wellenlänge (Kapitel 3)
λ	Wärmeleitfähigkeit im Boden (Kapitel 5)
μ	Kosinus des Zenitwinkels (Kapitel 3)
μ	Mittlere atmosphärische Molmasse (Kapitel 2)
μ	Parameter für das allgemeine implizite Verfahren (μ=0: explizites, μ=1/2: Crank-Nicholson-, μ=1: voll implizites Verfahren (Kapitel 5, 7)
ν	Frequenz (Kapitel 3)
ϱ	Dichte des atmosphärischen Gases (Kapitel 2, 4, 5)
ϱ_{d}	Dichte der Staubpartikel (Kapitel 6)
σ	Stefan-Boltzmann-Konstante σ=$5.67032{\cdot}10^{8}\,\mathrm{W/(m^2K)}$ (Kapitel 3)
τ	Optische Tiefe (Kapitel 3)
$\tau, \vec{\tau}$	Scherspannung (Kapitel 4)
υ	Wahre Anomalie (Abschnitt 1.3)
ϕ_{m}, ϕ_{h}	Monin-Obuchov-Funtionen (Kapitel 4, 5)
χ_{m}, χ_{h}	Integrierte Monin-Obuchov-Funtionen: $\chi_{\mathrm{m/h}} = \frac{1}{\kappa}\int \frac{\phi_{\mathrm{m/h}}(\zeta')}{\zeta'}\,d\zeta'$ (Kapitel 4, 5)

Danksagung

Ich bedanke mich herzlich bei Herrn Kneer für seine Bereitschaft, mich als Doktorvater zu betreuen und seine tatkräftige Unterstützung beim Abschluß der Arbeit.

Herrn Keller und der Max-Planck-Gesellschaft danke ich für die Bereitstellung der Möglichkeit, die Doktorarbeit finanziell abgesichert am Max-Planck-Institut für Aeronomie durchführen zu können.

P. Demchenko, G. S. Golicyn, dem Institut für Atmosphärenforschung und natürlich dem DAAD schulde ich großen Dank für die Möglichkeit, ein Jahr in Moskau forschen zu können.

A. Piepenbrink sei an dieser Stelle für das Warten der Rechner gedankt, auf denen ich einen Großteil meiner Rechnungen durchgeführt habe, sowie für sein offenes Ohr für die Bedürfnisse der Rechnerbenutzer.

W. Markiewicz, N. Thomas und dem Rest der Marsgruppe danke ich für interessante Diskussionen.

Und allen anderen Kollegen und Bekannten danke ich pauschal für Teepausen, Seminare, Diskussionen, Pläuschchen und alles, was ihnen sonst noch einfällt.

Lebenslauf

Name Wolfgang Dobler

2. 1. 1966 Geboren in Biberach/Riß

Juni 1985 Abitur in Biberach/Riß

WS 1987/88 – SS 1989 Studium der Physik in Karlsruhe

WS 1989/90 – WS 1992/93 Studium der Physik in Göttingen

April 1993 Diplom in Physik; Diplomarbeit «Numerische Behandlung kinematischer Dynamomodelle auf der Grundlage einer Integralgleichung» betreut von Prof. W. Deinzer

Sommer und Herbst 1993 Forschungsaufenthalte in Potsdam und Moskau

Januar 1994 bis Juli 1998 Doktorand am Max-Planck-Institut für Aeronomie

April 1995 – März 1996 Forschungsaufenthalt als DAAD-Stipendiat am Institut für Atmosphärenforschung in Moskau